

# Spektroskopische Messung des zeitlichen Verlaufs der radialen Dichte- und Temperaturverteilung in einem Wasserstofffunken

H. THOLL

Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. 22 a, 1068—1088 [1967]; eingegangen am 30. März 1967)

The temporal variation of the radial distribution of electron density and temperature in an oscillating spark in  $H_2$  at  $p_0=460$  Torr, initiated by the streamer process, was investigated in order to obtain an insight into the dynamic behaviour of the spark plasma channel. At the beginning of the channel expansion the electron densities measured from the STARK effect broadening of  $H_\beta$  amount to  $\sim 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , and after the end of expansion  $\sim 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . The measurements gave a maximum axial temperature of  $52\,000 \text{ }^\circ\text{K}$  at the maximum in current of the first half period ( $i_{\max}=1800 \text{ A}$ ). The pressure increase in the plasma channel at the beginning of its expansion was calculated from the measured density and temperature values to be  $p/p_0 \sim 20$ . By the end of the first half period in current this pressure ratio has already sunk to  $p/p_0 \sim 3$ . The spark channel achieves a maximum specific conductivity of  $\eta=520 \text{ } (\Omega \text{ cm})^{-1}$  at the maximum in current of the first half period and reaches its maximum conductance of  $G=6 \text{ } \Omega^{-1}$  after the end of the third half period of current. The energy supplied to the spark is expended in approximately equal proportions for the ionisation, heating and expansion of the spark plasma. The temporal and radial variation of the total density within the heated plasma channel and in the surrounding shock disturbed region is given and an interpretation of the so-called "envelope" of the channel is put forward.

In einer Gasentladungsstrecke, an die ein steiler, hinreichend hoher Überspannungsimpuls gelegt wird, entwickelt sich nach kurzer Zeit ein hochleitender Plasmakanal, der einen schnellen Zusammenbruch der angelegten Spannung verursacht. Im folgenden werden die Eigenschaften dieses hochleitenden Plasmakanals genauer untersucht. Hierzu wird eine planparallele Elektrodenanordnung von 2 cm Elektrodenabstand als Entladestrecke verwendet, in der ein Gasdruck von einigen 100 Torr herrscht, und an die ein Überspannungsimpuls von ca. 30% geschaltet wird. Nach unseren bisherigen Kenntnissen geht die Entwicklung des Funken in folgender Weise vor sich: Werden an der Kathode Elektronen räumlich und zeitlich konzentriert ausgelöst, so entsteht eine Elektronenlawine. Erreicht diese nach einem Driftweg, der kleiner als der Elektrodenabstand ist, eine Trägerzahl von  $\cong 10^8$ , dann entwickeln sich infolge des Eigenraumladungsfeldes aus dem Lawinenkopf heraus Plasmakanäle zur Anode und zur Kathode hin<sup>1-4</sup>. Der als Kanalaufbau bezeichnete Mechanismus erzeugt somit einen durchgehenden, die Elektroden verbindenden Trägerkanal, den Vorentladungs-kanal. Dieser besitzt wegen der geringen Elektronendichte zunächst noch eine sehr niedrige Leitfähigkeit

( $10^{-6} \text{ } \Omega^{-1}$ ). Im Vorentladungs-kanal erfolgt eine rasche Stromsteigerung, verbunden mit einer Steigerung der Leitfähigkeit des Kanals. In dieser Vorentladungsphase beträgt die Elektronentemperatur etwa 2–3 eV, und das Gas der schweren Teilchen befindet sich noch auf Zimmertemperatur.

Bei weiterer Energiezufuhr erfolgt nun innerhalb einiger nsec der Übergang in ein thermisches Funkenplasma. Die folgenden Messungen zeigen, daß die Elektronendichte  $\cong 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  erreicht, und der Ionisierungsgrad sich dem Wert 1 nähert. Elektronen- und Ionentemperatur besitzen dann etwa den gleichen Wert. Während der Vorentladungs-kanal bei Drucken von einigen 100 Torr einen Durchmesser von etwa 1 mm besitzt, erfolgt diese Thermalisierung zunächst nur in einem dünnen Faden von  $\cong 0,1 \text{ mm}$  Durchmesser in der Kanalachse. Wegen des schnellen Ablaufs dieser Aufheizung verläuft der Prozeß adiabatisch, und in dem Faden bildet sich ein hoher Überdruck ( $\cong 20$ -fach) aus, der zur radialen Aufweitung des aufgeheizten Fadens mit Überschallgeschwindigkeit führt. Als Folge davon entsteht am Kanalrand eine zylinderförmige Schockwelle, die sich von dem sich ausdehnenden Kanal ablöst und in das umgebende Gas hinein ausbreitet. In diesem

<sup>1</sup> Siehe hierzu die zusammenfassende Darstellung in: H. RAETHER, Electron Avalanches and Breakdown in Gases, Butterworth, London 1964.

<sup>2</sup> H. RAETHER, Z. Phys. 112, 464 [1939].

<sup>3</sup> H. THOLL, Z. Naturforschg. 18 a, 587 [1963]; 19 a, 704 [1964].

<sup>4</sup> K.-H. WAGNER, Z. Phys. 189, 465 [1966].



späten Stadium des thermischen Funkenkanals sinkt der Funkenwiderstand auf  $\approx 0,1 \Omega$  ab, und die erreichbaren Stromstärken hängen vorwiegend von den Parametern des äußeren Kreises ab.

Im zuletzt beschriebenen hochleitenden Plasma-kanal wird eine orts- und zeitabhängige spektroskopische Plasmadiagnostik durchgeführt. Der stromstarke Funkenkanal eignet sich hierfür besonders, da in ihm die Kriterien für lokales thermisches Gleichgewicht gut erfüllt sind. Dies gilt besonders für Wasserstoff, der im stromstarken Kanal vollständig dissoziiert ist und den Vorteil hat, daß die Berechnung des Linienspektrums sowie des kontinuierlichen Spektrums exakt möglich ist. Hinzu kommt die Verbreiterung der Wasserstofflinien durch linearen STARK-Effekt, wodurch eine Bestimmung der Elektronendichte möglich ist. Mit Hilfe der aus dem Kontinuum und dem Linienspektrum bestimmten Temperatur sowie der aus der STARK-Effekt-Verbreiterung ermittelten Elektronendichte läßt sich über die SAHA-Gleichung auch der Druck im Funkenkanal ermitteln.

Messungen der radialen Dichte und Temperaturverteilung in stationären Bogenentladungen liegen bereits in größerer Zahl vor<sup>5-7</sup>. Die Meßtechnik ist bei diesen stationären Entladungen gegenüber den im nsec- und  $\mu$ sec-Bereich ablaufenden Funkenentladungen erheblich einfacher. Da zudem die Zeit als Parameter entfällt, reduziert sich auch das Informationsmaterial.

Bereits durchgeführte Temperaturbestimmungen in Funken arbeiteten ohne radiale Auflösung und waren z. Tl. auch in der Zeitauflösung begrenzt<sup>8, 9</sup>. Eine Messung der radialen Temperatur und Dichte-Verteilung in Luft, N<sub>2</sub> und He liegt bereits vor<sup>10</sup>. Die dort erhaltenen Ergebnisse zeigten einen relativ konstanten Temperatur- und Dichteverlauf über den Funkenquerschnitt. Allerdings wurde in<sup>10</sup> der Temperatur- und Dichteverlauf nur in einigen wenigen Zeitpunkten wiedergegeben, so daß noch keinerlei Einblick in die zeitliche Entwicklung dieser Größen möglich war. Andererseits wird jedoch bei Rechnungen zur Ausbreitung des Funkenkanals<sup>11, 12</sup> und bei

der Berechnung des Entladungsstromes<sup>13</sup> der Übersicht halber mit konstanter Temperatur und Leitfähigkeit im Funkenkanal gerechnet. Eine Überprüfung dieser Voraussetzungen, die zugleich einen Einblick in die zeitliche Entwicklung des Funkenplasmas liefert, war deshalb angebracht.

## I. Apparatus

a) Elektrischer Kreis

Die Untersuchung der Funkenkanäle wurde mit Hilfe einer Stoßspannungsapparatur im homogenen Feld durchgeführt. Das Prinzipschaltbild der Apparatur ist in Abb. 1 dargestellt. Zu der an der Kathode K anliegenden Gleichspannung  $-U_0$  wird durch das Thyratron TH ein Spannungsimpuls  $U_i$  geschaltet, der die ge-

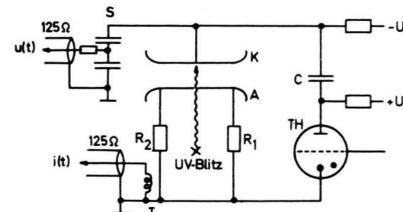


Abb. 1. Prinzipschaltbild der Stoßapparatur. K = Kathode, A = Anode, TH = Thyratron, C = Stoßkondensator, S = Spannungsteiler,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ , T = Stromtransformator.

wünschte Überspannung liefert. Gleichzeitig werden durch den UV-Blitz innerhalb von  $\cong 20$  nsec und innerhalb einer Fläche von 0,5 mm Durchmesser etwa  $10^3$  Elektronen durch Photoeffekt aus der Kathode ausgelöst, die die Entladung einleiten. Der nach Durchlaufen der einzelnen Entwicklungsstadien entstehende Stromimpuls von max. 1800 A wird über den Stromtransformator T mit einem **Tektronix** 519-Oszillosgraphen beobachtet. Gleichzeitig kann der Spannungszusammenbruch über den Teiler S ebenfalls oszillosgraphisch registriert werden. Der elektrische Kreis ist koaxial und abgeschirmt aufgebaut und hat nach Zündung des Thyatron und nach der Entwicklung eines hochleitenden Plasmakanals zwischen den Elektroden als gedämpfter Schwingkreis folgende Eigenschaften:  $C = 12,7$  nF,  $L = 0,72$   $\mu$ H, Schwingungsdauer  $T = 600$  nsec, Gesamtdämpfungswiderstand  $R = 2,8$   $\Omega$ , davon entfallen 1  $\Omega$  auf den Meßwiderstand  $R_1$ ,  $R_2$ , ca. 0,1 bis 0,2  $\Omega$  auf die Funkenstrecke und der Rest auf das Thyatron.

<sup>5</sup> Siehe hierzu die zusammenfassende Darstellung in: W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, Elektrische Bögen und thermisches Plasma, Handbuch der Physik, Bd. XXII, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

<sup>6</sup> H. MAECKER, Z. Phys. 136, 119 [1953].

<sup>7</sup> H. MAECKER, TH. PETERS u. H. SCHENK, Z. Phys. **140**, 119 [1955].

<sup>8</sup> H. SPÄTH u. H. KREML, Z. Angew. Phys. **12**, 8 [1960].

<sup>9</sup> H. KREML, Z. Phys. **167**, 302 [1962].

10 V. F. EGOROV, V. I. ISAENKO, A. A. MAKU, A. I. SADKOVA, Soviet Phys. — Tech. Phys. 7, 242 [1962].

<sup>11</sup> S. I. DRABKINA, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **21**, 473 [1951].

<sup>12</sup> S. I. BRAGINSKII, Soviet Phys. — JETP **34**, 1068 [1958].

<sup>13</sup> S. I. ANDREEV u. B. I. ORLOV, Soviet Phys.—Tech. Phys. **10**, 1097 [1966].

Abb. 2 \* zeigt den oszillierenden Verlauf des Entladungstromes und der an der Entladestrecke liegenden Spannung.

Für die nachfolgenden Messungen wurden folgende experimentellen Bedingungen gewählt: Elektrodenabstand  $d = 2$  cm, Druck  $p = 460$  Torr Wasserstoff bei  $20^\circ\text{C}$ , Spannung  $U = 21,5$  kV,  $E/p = 23,4$  V/cm·Torr, Anfangselektronenzahl  $n_0 \cong 1500$ , Stoßionisierungskoeffizient  $\alpha = 8,5 \text{ cm}^{-1}$ , kritischer Laufweg einer Lawine für den Übergang in den Kanalaufbau  $z_{\text{krit.}} = 1,5$  cm, Ladeenergie des Stoßkondensators  $C U^2/2 = 2,94$  Joule.

### b) Optischer Aufbau

Da der zeitliche Verlauf der vom Funken emittierten Lichtintensität in radialer Richtung, d. h. als Funktion des Abstandes von der Funkenachse untersucht werden soll, wurde hierfür die in Abb. 3 gezeigte optische Anordnung benutzt<sup>10</sup>. Der Funke F wird über die Linse  $L_1$  auf den in der Abbildungsebene A liegenden Ein-

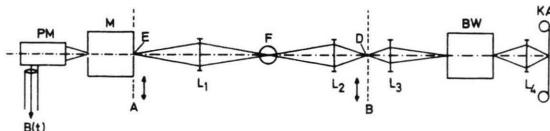


Abb. 3. Optischer Aufbau, in Richtung der Funkenachse gesehen. F = Funkenkanal (max. Durchmesser  $\cong 4$  mm), PM = Photomultiplier (Philips 56 TVP), M = Monochromator (Bausch & Lomb High Intensity Model), BW = Bildwandlwischkamera (RCA-4449 A), KA = photogr. Kamera,  $L_1$  bis  $L_4$  = Linsen, A und B = Abbildungsebenen des Funkens, E = Monochromatoreintrittsspalt (Breite  $< 0,05$  mm, Höhe 1 mm), D = Markierungsdrat (Durchmesser  $\cong 0,025$  mm).

trittsspalt E des Monochromators M im Verhältnis 1 : 1 abgebildet. Gleichzeitig erfolgt über  $L_2$  eine Abbildung auf die Ebene B, in welcher parallel zur Funkenachse und parallel zu E ein dünner Markierungsdrat D gespannt ist. D wird zusammen mit dem Funkenlicht über  $L_3$  auf die Photokathode der Bildwandlkamera BW abgebildet. Wird nun E und D so justiert, daß sie über  $L_1$ ,  $L_2$  genau aufeinander abgebildet sind, dann markiert der Schattenwurf des Drahtes D in der Bildwandleraufnahme stets die genaue Position des Eintrittsspaltes E bezüglich der Funkenachse, und zwar unabhängig von örtlichen Streuungen des Funkens F. Schließlich wird aus dem 2 cm langen Funkenkanal durch zwei bei A und B in der Zeichenebene liegende Spalte eine ca. 1 mm dicke Scheibe herausgeblendet. Durch synchrone seitliche Verschiebung von E und D ist nun eine radiale Abtastung des abgestrahlten Funkenlichtes möglich. Die durch den Monochromator hindurch tretende Intensität wird mit dem Photomultiplier PM registriert und in ihrem zeitlichen Verlauf oszillographisch beobachtet. Der Bildwandler BW erzeugt ein

in Richtung der Funkenachse abgelenktes Wischbild der ausgeblendeten Scheibe, so daß deren radiale Ausdehnung als Funktion der Zeit untersucht werden kann. Abb. 4 \* zeigt eine solche Wischaufnahme des sich aufweitenden Funkenkanals mit dem Schatten des Markierungsdrähtes.

## II. Durchführung der Messung und gemessene Intensitätsverteilungen

### a) Bemerkungen zur Längsstruktur des Kanals

Bei den im vorangegangenen Kapitel angegebenen experimentellen Bedingungen erreicht eine mit  $n_0 \cong 10^3$  Elektronen gestartete Lawine nach etwa 1,5 cm ihre kritische Verstärkung von  $10^8$  und geht in den Kanalaufbau über. Schon frühere Untersuchungen ergaben<sup>2, 3, 14-16</sup>, daß sich dann in der Umgebung dieses kritischen Punktes ein schmaler, bedeutend heller als die Umgebung leuchtender Hals ausbildet. Die weiteren experimentellen Beobachtungen zeigten, daß in diesem Bereich zuerst der Übergang in das thermische Funkenplasma beginnt. Schon rein qualitativ kann man erkennen, daß zuerst in diesem Hals der Funkenkanal rötlich zu leuchten beginnt, herrührend von der Intensität der BALMER-Linie  $H_\alpha$  (6550 Å) des H-Atoms, woraus sich auf eine weitgehende Dissoziation des Gases schließen läßt. Der übrige Vorentladungskanal leuchtet zu dieser Zeit noch schwach bläulich im Licht des Dissoziationskontinuums des  $H_2$ -Moleküls. Der heiße Faden hoher Elektronendichte breitet sich zunächst sehr schnell in den kathodengerichteten Teil des Vorentladungskanals hinein aus und mit einer gewissen Verzögerung auch in den anodengerichteten Teil<sup>15, 16</sup>. Eine derartige inhomogene Aufheizung der Vorentladungskanäle wurde auch in einer neueren Arbeit<sup>17</sup> in Luft gefunden.

Die zeitlich und örtlich ungleichmäßige Aufheizung des Vorentladungskanals hat entsprechend auch mehr oder weniger große Intensitätsstreuungen im stromstarken Plasmakanal zur Folge. Diese sind am größten im nur schlecht aufgeheizten anodengerichteten Teil des Kanals. Da die geringsten Intensitätsstreuungen im kathodengerichteten Teil des Funkens gefunden wurden, erfolgte in diesem Bereich auch die Ausmessung der radialen Intensitätsverteilung. Hierzu wurden die in Abb. 3 bei A und B (in der

\* Abb. 2, 4 und 24 auf Tafel S. 1072 a.

<sup>14</sup> K. R. ALLEN u. K. PHILLIPS, Proc. Roy. Soc. London A **274**, 163 [1963].

<sup>15</sup> H. THOLL, Proc. VII. Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vol. 1, 620, Beograd 1966.

<sup>16</sup> J. KOPPITZ, Z. Naturforsch. **22 a**, 1089 [1967].

<sup>17</sup> H. WINKELKEMPER, Arch. Elektrotech. **51**, 1 [1966].

Zeichenebene) liegenden Spalte so eingestellt, daß eine „Scheibe“ des Kanals von 1 mm Dicke im Abstand von 0,6 cm von der Kathode ausgeblendet wurde, in welcher die radiale und zeitliche Entwicklung des abgestrahlten Lichtes als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$  untersucht werden konnte.

*b) Messung der radialen Intensitätsstruktur*

Wird die radiale Intensitätsverteilung untersucht, so erhält man bei der hier benutzten seitlichen Beobachtung des Kanals zunächst eine über die Schichttiefe integrierte Intensität. Die Verhältnisse sind in

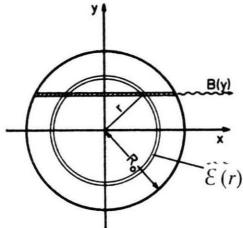


Abb. 5. Skizze zu Gl. (1).

Abb. 5 dargestellt. Die im Abstand  $y$  von der Kanalachse beobachtete Intensität ist danach:

$$B(y, t) = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{R_0(t)^2 - y^2}} \mathcal{E}(r, t) dr, \quad (1)$$

wobei  $\mathcal{E}(r, t)$  der Emissionskoeffizient in einem Kreisring mit dem Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  ist. Gl. (1) gilt nur, wenn die Strahlung aus optisch dünner Schicht emittiert wird \*.  $\mathcal{E}(r, t)$  muß durch numerische Integration von Gl. (1) aus dem gemessenen  $B(y, t)$  berechnet werden. Die hierfür benutzten Methoden sind im Anhang dargestellt.

Die Messung der  $B(y)$ -Verteilung der Strahlung erfolgte durch schrittweises Durchfahren (Schrittweite 0,05 mm) des Monochromatoreintrittspaltes in  $y$ -Richtung (s. Abb. 3, 5). Bei jedem eingestellten  $y$ -Wert wurden etwa 10 – 20 Funken gezündet. Die einzelnen Funken streuten etwa um  $\pm 0,1$  mm um den eingestellten  $y$ -Wert. Diese Streuung konnte jedoch eliminiert werden, da der genaue Achsenabstand  $y$ , aus dem die Strahlung registriert wurde, für jeden Funken aus der dazugehörenden Bildwandler-Wischaufnahme ermittelt werden konnte.

\* Eine Abschätzung des Absorptionskoeffizienten ergab, daß das untersuchte Rekombinationskontinuum aus optisch dünner Schicht emittiert wird. Das gleiche gilt für die Linienintensitäten von  $H_\beta$  und aller höherer BALMER-Linien. Für  $H_\alpha$  ist die Bedingung optisch dünner Schicht nicht mehr hinreichend erfüllt, und es sind Fehler von ca. 20% im  $\mathcal{E}(r, t)$  zu erwarten.

Da bei der Abbildung des Funken auf den Monochromatoreintrittspalt mit großer Tiefenschärfe gearbeitet wurde (Blende 11), betrug die Auflösung in  $y$ -Richtung etwa 0,05 mm.

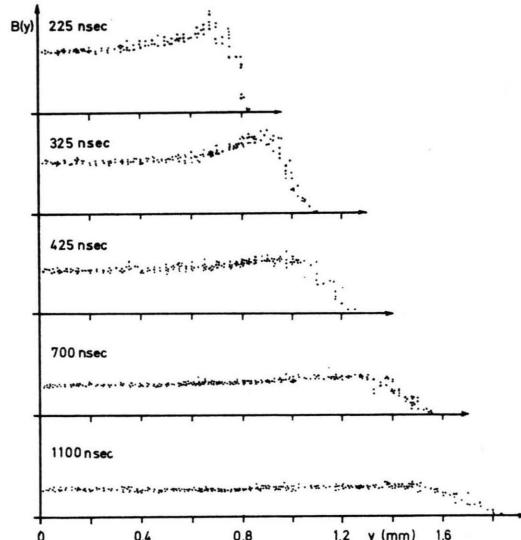
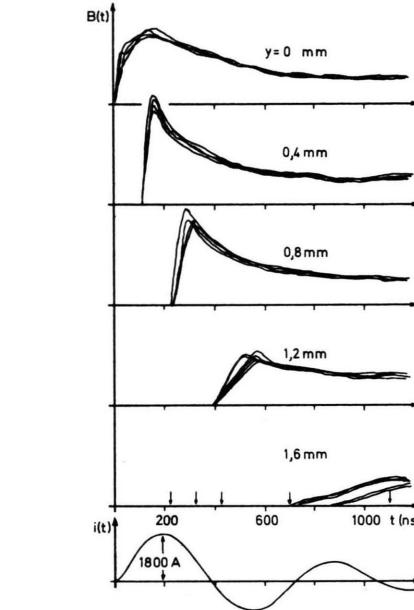


Abb. 6. a) Gemessene Intensitätsverteilung  $B(t)$  (Photomultiplieroszillogramme) bei 5 verschiedenen Achsenabständen; b) daraus umgezeichnete Verteilungen  $B(y)$  zu 5 verschiedenen Zeitpunkten für das H-Rekombinations- und Bremskontinuum bei 6000 Å. In den  $B(t)$ -Verteilungen sind mehrere Oszilloskopbilder übereinandergezeichnet, um einen Eindruck von der Streuung zu vermitteln. Die Pfeile markieren die Zeitpunkte der gezeigten  $B(y)$ -Verteilungen. Unter den Oszilloskopbildern der Abb. 6a) wurde zum Vergleich der durch den Funken fließende Entladungsstrom  $i(t)$  eingezeichnet.

In der Abb. 6 wurde die Messung von  $B(y, t)$  in dem der BALMER-Serie unterlagerten Brems- und Rekombinationskontinuum im Wellenlängenbereich von 5800 bis 6200 Å (im folgenden Kontinuum 6000 genannt) wiedergegeben. Es wurde als Beispiel eine Auswahl der erhaltenen Photomultiplieroszillogramme bei 5 verschiedenen  $y$ -Werten zusammengestellt (Abb. 6 a). Aus dieser Oszillogrammschar, in welcher die Intensität  $B$  als Funktion der Zeit vorliegt [ $B(t)$ ] mit  $y$  als Parameter, kann nun leicht die Schar der  $B(y)$ -Verteilungen mit  $t$  als Parameter umgezeichnet werden. Diese umgezeichnete  $B(y)$ -Schar ist ebenfalls in Abb. 6 b dargestellt.

Wie auch aus der in Abb. 4 gezeigten Wischaufnahme hervorgeht, wird mit der in Abb. 6 benutzten Zeitablenkung etwa die Hauptaufweitungssphase des Funkenkanals erfaßt. Die schnelle erste Phase von 0 – 100 nsec wurde mit einer gegenüber Abb. 6 um das 10-fache vergrößerten Zeitauflösung und die langsame Abkühlungsphase mit einer 5-mal kleineren Zeitauflösung oszillographiert. In gleicher Weise wie in Abb. 6 gezeigt wurden auch die Verteilungen der Linienintensität für  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  ermittelt.

c) Berechnete radiale Verteilungen des Emissionskoeffizienten  $\mathcal{E}(r)$

In Abb. 7 a, b sind für das Kontinuum 6000 Å die berechneten Verteilungen des radialen Emissionskoeffizienten  $\mathcal{E}_k(r)$  zu den verschiedenen Zeitpunkten der Funkenentwicklung aufgetragen worden. Dabei enthält Abb. 7 a die Entwicklung im schnellen Anfangsteil des Funkens zwischen 0 und 100 nsec und die Abb. 7 b die weitere Entwicklung bis zu 3000 nsec. Die aus den in Abb. 6 gezeigten  $B(y)$ -Verteilungen berechneten  $\mathcal{E}_k(r)$ -Verteilungen zu den Zeitpunkten 225, 325, 425, 700 und 1100 nsec sind in Abb. 7 b enthalten.

Abb. 8 a, b enthält die  $\mathcal{E}(r)$ -Verteilungen für die BALMER-Linie  $H_\beta$  zu den gleichen wie in Abb. 7 a, b gezeigten Zeitpunkten. Auffallend bei den gezeigten  $\mathcal{E}(r)$ -Verteilungen ist das am Kanalrand auftretende hohe Intensitätsmaximum, das am ausgeprägtesten bei  $H_\beta$  ist. Eine eingehende Diskussion dieses Verhaltens wird im nächsten Abschnitt III im Zusammenhang mit der Temperaturauswertung durchgeführt.

d) Messung der Linienverbreiterung von  $H_\beta$

Zur Bestimmung der radialen Verteilung der Halbwertsbreite  $\Delta\lambda(r)$  von  $H_\beta$  in den verschiedenen

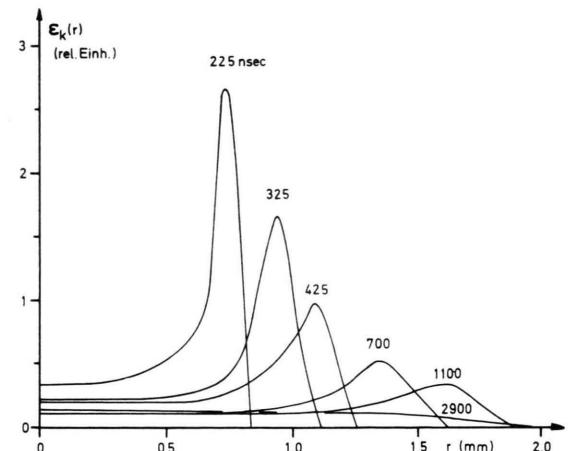
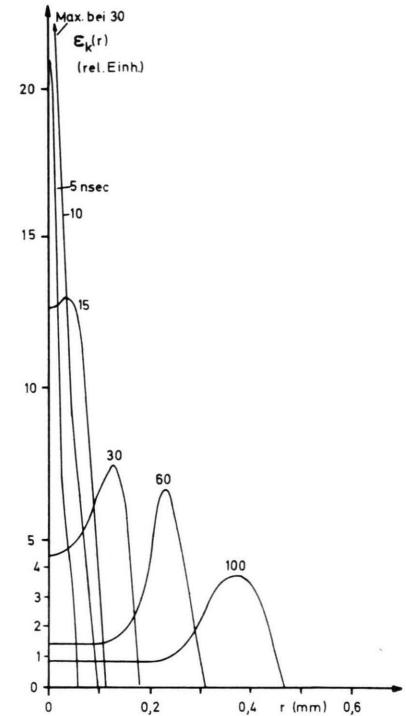


Abb. 7. a) Radiale Verteilung  $\mathcal{E}_k(r)$  des Emissionskoeffizienten des Kontinuums 6000 Å im schnellen Anfangsteil der Aufweitung bis zu 100 nsec. b) Weitere Entwicklung von  $\mathcal{E}_k(r)$  des Kontinuums 6000 Å bis zu 2,9  $\mu$ sec.

Zeitpunkten wurden zwischen 4750 und 5000 Å im Abstand von 10 Å die  $B(y)$ -Verteilungen gemessen und daraus die  $\mathcal{E}(r)$ -Verläufe berechnet. Für einen bestimmten Achsenabstand  $r$  und einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  läßt sich dann das Profil von  $H_\beta$  zusammensetzen. Der Aufwand bei dieser Messung ist sehr groß, da man es hierbei mit einer zweiparametrischen Schar von  $B(y)$ - bzw.  $\mathcal{E}(r)$ -Verteilungen zu tun hat

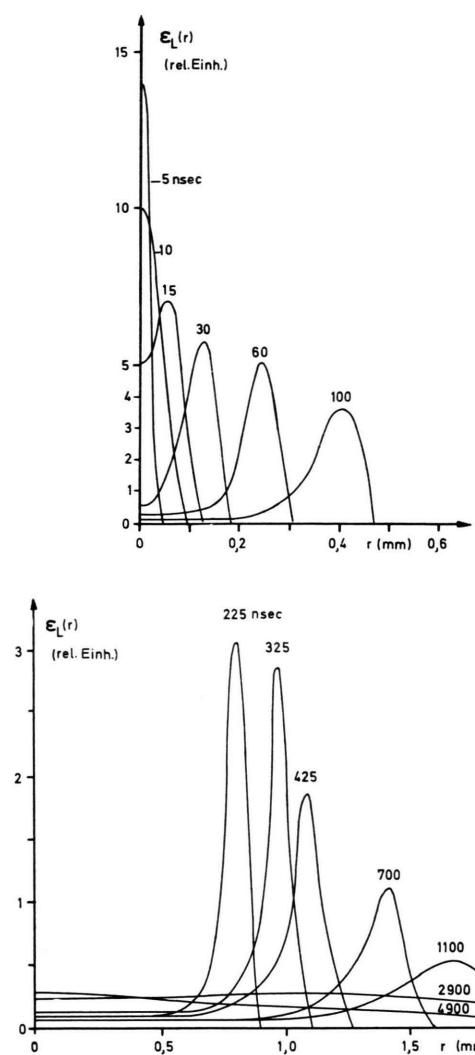


Abb. 8. a) Radiale Verteilung des Emissionskoeffizienten  $\epsilon_L(r)$  von  $H_\beta$  im schnellen Anfangsteil bis zu 100 nsec.  
b) Weitere Entwicklung der  $\epsilon_L(r)$ -Verteilung von  $H_\beta$  bis zu 2,9  $\mu$ sec.

(Parameter sind  $t$  und  $\lambda$ ). Bei der Auswertung zeigt es sich, daß brauchbare Profile nur in der Randschicht des Kanals – also in der Umgebung des Intensitätsmaximums der  $\epsilon(r)$ -Verteilung – erhalten werden konnten. Der Grund hierfür ist die gegenüber der Randintensität relativ geringe Strahlungsdichte in der Kanalmitte, wie dies aus Abb. 8 a, b ersichtlich ist. Auf Grund dieser geringen Strahlungsdichte in der Kanalmitte ist dort die Streuung so groß, daß eine Profilbestimmung nahezu unmöglich ist. Erst in der Abkühlphase des Funkens für  $t > 1 \mu$ sec nimmt die Intensität in der Kanalmitte soweit

zu, daß auch die Profile in der Kanalmitte bestimmt werden konnten. Die in der Randschicht des Kanals gemessene Halbwertsbreite des Profils von  $H_\beta$  gestattet die Berechnung der dort vorliegenden Elektronendichte (s. Anhang). Diese so erhaltenen Randdichten sind in der im Kapitel III folgenden Abb. 17 aufgetragen und bei der Diskussion entsprechend berücksichtigt worden.

Des weiteren wurde auch die Linienbreite von  $H_\beta$  als Funktion der Zeit unter Verzicht auf radiale Auflösung gemessen. In diesem Fall war die Stellung des Monochromatoreintrittspaltes so, daß nur die Strahlung aus einem Streifen der Breite  $\Delta y = 0,05$  mm durch die Kanalachse, also  $B(y=0)$ , registriert wurde. Unter diesen Verhältnissen wird man ein Linienprofil erhalten, dessen Breite durch die Elektronendichte in den verschiedenen radialen Zonen des Kanals beeinflußt wird. Diese mittlere Linienbreite von  $H_\beta$  liefert dann eine über den Kanalquerschnitt gemittelte Elektronendichte. In Abb. 9 sind die so erhaltenen Profile von  $H_\beta$  zu verschiedenen

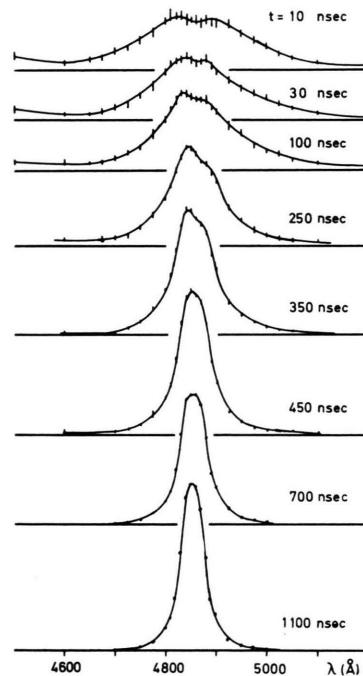


Abb. 9. Über die Schichttiefe gemitteltes Linienprofil von  $H_\beta$  als Funktion der Zeit.

Zeiten wiedergegeben. Deutlich ist die zunehmende Verringerung der Linienbreite mit wachsender Zeit erkennbar, woraus also auf eine Abnahme der mittleren Elektronendichte geschlossen werden kann. Die Einstellung der Profile in Linienmitte liegt daran,

daß bei der Verbreiterung von  $H_\beta$  durch STARK-Effekt keine unverschobene Mittenkomponente auftritt, so daß theoretisch die Intensität in der Linienmitte sogar auf Null abfallen sollte (s. auch im Anhang).

### III. Auswertung der Meßergebnisse

#### a) Ermittlung der Temperaturverteilung im Funkenkanal

Zur Ermittlung der radialen Temperaturverteilung wurde hauptsächlich ein Verfahren angewandt, das bereits mit Erfolg zur Temperaturbestimmung im stationären Hochtemperaturbogen (GERDIEN-Bogen) benutzt wurde<sup>7, 18</sup>, und das in unserem Fall auf die nichtstationäre Entladung eines Funkenkanals übertragen wird. Die im Anhang durchgeführte Berechnung der Teilchendichten und der Linien- bzw. Kontinuumsintensität in einem thermischen Wasserstoffplasma zeigt, daß sowohl die Elektronendichte als auch die Linienintensität und die Kontinuumsintensität bei einer bestimmten optimalen Anregungstemperatur, der jeweiligen Normtemperatur  $T^*$ , ein Maximum besitzen. An Hand unserer Meßergebnisse soll im folgenden gezeigt werden, wie aus dem im Anhang gezeigten  $\mathcal{E}(T)$ -Verlauf (Abb. 26, 27) der Verlauf  $T(r)$  mit Hilfe dieses Normtemperaturverfahrens ermittelt werden kann.

Betrachtet man die in Abb. 7 a, b gezeigten radialen Intensitätsverteilungen  $\mathcal{E}_k(r)$  des Kontinuums 6000 Å, so fällt das mit wachsender Zeit sich immer weiter nach außen schiebende Intensitätsmaximum am Kanalrand auf, welches sich dabei außerdem in zunehmendem Maße abbaut. Die Erklärung dieser Erscheinung ergibt sich nun auf Grund der im Anhang durchgeführten Berechnung von  $\mathcal{E}_k$  [Gl. (26) und Abb. 27] zwanglos. Am äußersten Kanalrand ist mit Sicherheit die Temperatur  $T < T_k^*$ . Vom Kanalrand aus steigt zum Inneren des Kanals hin die Temperatur an. Dabei erreicht sie in einem bestimmten Kreisring mit dem Radius  $r^*$  den Wert  $T_k^*$ , also die Normtemperatur des Kontinuums. Aus diesem Kreisring wird deshalb die größte Kontinuumsintensität emittiert. Steigt nun die Temperatur zum Kanalinneren hin weiter an, so wird  $\mathcal{E}_k(r)$  wieder abnehmen, wie die in Abb. 27 gezeigte Funktion  $\mathcal{E}_k(T)$  zeigt. Da bei  $r = r^*$  die Temperatur  $T = T^*$  bekannt ist, läßt sich nun aus dem Verlauf  $\mathcal{E}_k(r)$  über Gl. (21) und (26) der Verlauf  $T(r)$  berechnen. Zu die-

sem Zweck wurde  $\mathcal{E}_k$  mit Hilfe eines Rechenprogramms nach Gl. (21), (26) als Funktion von  $T$  und  $p$  tabelliert.

Voraussetzung für die Anwendung des Normtemperaturverfahrens ist, daß für einen festgehaltenen Zeitpunkt der Druck über den Querschnitt des Funkenkanals konstant ist, und daß  $p$  im Kanal zumindest näherungsweise bekannt ist, da  $T_k^*$  schwach druckabhängig ist. Eine Abschätzung in<sup>12</sup> zeigte, daß selbst am Kanalrand kein merklicher Drucksprung auftritt, so daß die Annahme konstanten Drucks im Kanal gerechtfertigt sein sollte. Ferner ergab die in<sup>12</sup> durchgeführte Lösung des hydrodynamischen Gleichungssystems für den Zusammenhang zwischen Druck im Kanal  $p$  und Aufweitungsgeschwindigkeit des Kanals  $v_k$ :

$$p = 0,9 \cdot \varrho_0 v_k^2 + p_0 \quad \text{erg/cm}^3, \quad (2)$$

$p_0$  = Druck des ungestörten Gases in  $\text{erg/cm}^3$ ,

$\varrho_0$  = Gasdichte des ungestörten Gases in  $\text{g/cm}^3$ .

Da  $v_k$  aus Bildwandlerwischaufnahmen wie in Abb. 4 bestimmt werden kann, und  $p_0$ ,  $\varrho_0$  bekannt sind, läßt sich  $p$  nach Gl. (2) abschätzen. Damit sind alle Informationen für die Anwendung des Normtemperaturverfahrens vorhanden.

Die Verteilungen  $\mathcal{E}_L(r)$  von  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  besitzen am Kanalrand ein noch schärferes Intensitätsmaximum bei  $r = r^*$  als  $\mathcal{E}_k(r)$  (siehe z. B. Abb. 8 a, b). Aus den  $\mathcal{E}_L(r)$ -Verteilungen läßt sich im Prinzip auf die gleiche Weise wie für  $\mathcal{E}_k(r)$  ein Temperaturverlauf  $T(r)$  ermitteln. Allerdings werden bei hohen Temperaturen in der Kanalmitte die Unsicherheiten groß, da infolge der starken Temperaturabhängigkeit von  $\mathcal{E}_L(T)$  für  $T > T_L^*$  (s. Abb. 27) die Linienintensitäten in der Kanalmitte nur noch gering sind, wie dies in Abb. 8 a, b für  $H_\beta$  gut zu erkennen ist. Diese Schwierigkeit besteht für die Kontinuumsintensität nicht in dem Maße, so daß die aus  $\mathcal{E}_k(r)$  ermittelten  $T(r)$ -Verläufe die genauesten sind.

In Abb. 10 sind nun die aus den zu den verschiedenen Zeiten vorliegenden  $\mathcal{E}_k(r)$ -Verteilungen ermittelten  $T(r)$ -Verteilungen wiedergegeben. Zur Genauigkeit der damit ermittelten Achsentemperatur im Kanal ist folgendes zu bemerken: Eine Fehlmesung und Berechnung des Mitte-Randverhältnisses von  $\mathcal{E}_k(r)$  dürfte auf keinen Fall größer als  $\pm 20\%$  sein. Dieser immerhin recht große Fehler im  $\mathcal{E}_k(r)$  kann bei der numerischen Lösung der ABELSchen Integralgleichung [Gl. (1)] entstehen, wobei im  $B(y)$ -Verlauf ein erheblich kleinerer Fehler genügt.

<sup>18</sup> R. W. LARENZ, Z. Phys. 129, 327, 343 [1951].

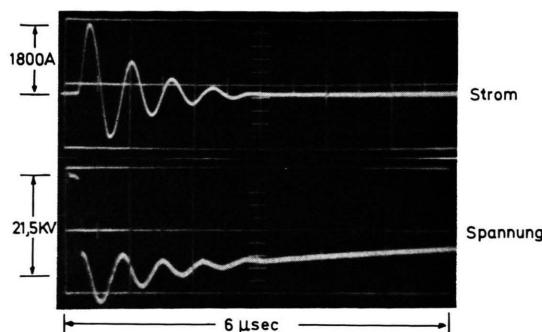


Abb. 2. Strom- und Spannungsverlauf beim Durchbruch der Entladestrecke; der langsame Wiederanstieg der Spannung wird durch die zu kleine Zeitkonstante des Spannungsteilers S verursacht.

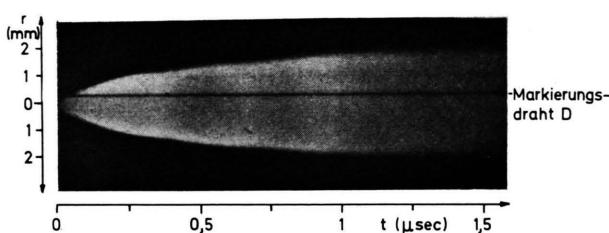


Abb. 4. Wischaufnahme des sich aufweitenden Funkenkanals mit dem Schatten des Markierungsdrähtes D; als Zeitnullpunkt wurde hier der Beginn der Aufweitung des Funkenkanals gewählt. Der „echte“ Zeitnullpunkt, d.h. der Startzeitpunkt der an der Kathode ausgelösten Elektronen, liegt um etwa 250—300 nsec früher.

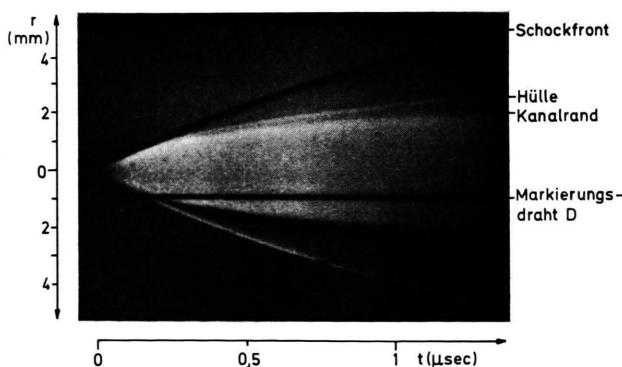


Abb. 24. Schlieren-Wischaufnahme des sich aufweitenden Plasmakanals mit Schockfront und Hülle.



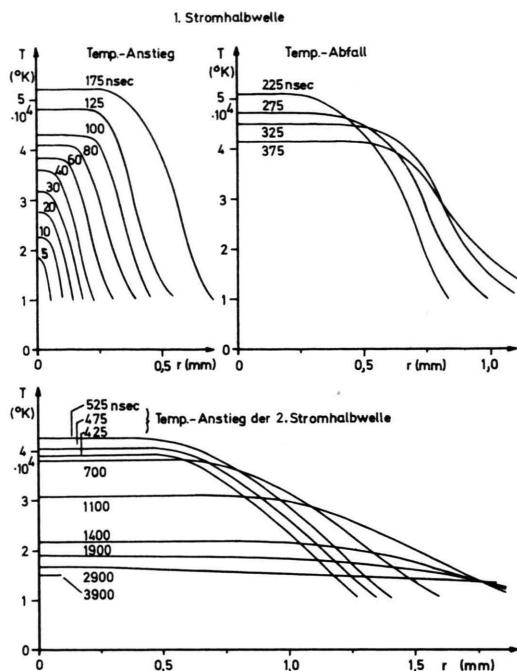


Abb. 10. Radiale Temperaturverteilung  $T(r)$  zu den verschiedenen Zeitpunkten der Entwicklung des Funkenkanals.

Ein Fehler im  $\mathcal{E}_k(r)$  von  $\pm 20\%$  liefert für die Achsentemperatur  $T(0)$  einen Fehler von  $\pm 10\%$  bei Temperaturen von  $50\,000\text{ }^{\circ}\text{K}$ .

In der nächsten Abb. 11 ist der zeitliche Temperaturverlauf in der Kanalmitte ( $r=0$ ) aufgetragen. Dazu wurde ein Oszillogramm des Entladungsstromes eingezeichnet. Die maximale Temperatur von  $52\,000\text{ }^{\circ}\text{K}$  wird im Strommaximum der ersten Halbwelle erreicht. Während der nächsten zwei Stromhalbwellen oszilliert die Mittentemperatur ebenfalls leicht, nach der dritten Halbwelle wird die Energieeinspeisung so gering, daß dann die Temperatur in der Kanalachse monoton fällt.

Die in Abb. 11 eingezeichneten Meßwerte geben die erhaltenen Achsentemperaturen wieder, die nach verschiedenen Verfahren bestimmt wurden. Dabei sind  $\bullet$ ,  $+$ ,  $\times$  Werte, die nach dem eben beschriebenen Normtemperaturverfahren gewonnen wurden, und zwar aus den Verläufen  $\mathcal{E}_k(r)$ ,  $\mathcal{E}_L(r)$  für  $H_\alpha$  und  $\mathcal{E}_L(r)$  für  $H_\beta$ . Eine weitere Möglichkeit zur Temperaturbestimmung ergibt sich, wenn man das Verhältnis von Linien- zu Kontinuumsintensität mißt. Die Theorie hierzu ist in <sup>19</sup> dargestellt. Aus diesem Linien-zum-Kontinuumsintensitätsverhältnis

wurden für  $H_\alpha$  und für  $H_\beta$  ebenfalls Temperaturwerte ermittelt, die in Abb. 11 eingetragen sind ( $\nabla$ ,  $\triangle$ ).

Eine Temperaturbestimmung ist auch durch Messung des Intensitätsverhältnisses von  $H_\alpha$  zu  $H_\beta$  möglich. Diese Methode liefert jedoch nur bei geringen Temperaturen ( $T < 20\,000\text{ }^{\circ}\text{K}$ ) brauchbare Ergebnisse, da der Abstand der Energieniveaus von  $H_\beta$  und  $H_\alpha$  sehr klein ist ( $\Delta E = 0,66\text{ eV}$ ). Danach erhaltene Werte für die späte Abkühlungsphase wurden ebenfalls in Abb. 11 eingetragen (○).

#### Vergleich mit den Temperaturen anderer Autoren:

Andere Autoren <sup>8, 9</sup> haben nach dem Normtemperaturverfahren die Temperatur in einem abkühlenden Funkenkanal ermittelt. Als Gas wurde Stickstoff verwendet. Dabei wurde unter Verzicht auf eine radiale Auflösung der Intensität der zeitliche Verlauf von Spektrallinien unterschiedlicher Anregungsspannung registriert. Die zu verschiedenen Zeitpunkten der Abkühlungsphase auftretenden Normmaxima der einzelnen Linien lieferten Temperaturfixpunkte, in deren Umgebung nun aus dem zeitlichen Verlauf  $\mathcal{E}(t)$  der Intensität der Verlauf  $T(t)$  der Temperatur gewonnen wurde. Der Unterschied gegenüber unseren Messungen oder den Messungen im Hochstrombogen <sup>7, 18</sup> liegt also darin, daß statt des radialen Verlaufs von  $\mathcal{E}(r)$  der zeitliche Verlauf  $\mathcal{E}(t)$  verwendet wurde. Die in <sup>8, 9</sup> verwendete Methode liefert daher nur eine über den Funkenquerschnitt gemittelte Temperatur.

Die Linien verschiedener Anregungsspannung ergeben in <sup>8</sup> sehr unterschiedliche mittlere Temperaturen, deren Maximalwert im Maximum der ersten Stromhalbwelle zwischen  $30\,000$  und  $50\,000\text{ }^{\circ}\text{K}$  liegt.

In <sup>10</sup> wurde die radiale Temperaturverteilung in Luft, Stickstoff und Helium gemessen. Für Luft bei 1 Atm. wurde eine maximale Achsentemperatur von etwa  $50\,000\text{ }^{\circ}\text{K}$  gefunden.

Interessant ist schließlich noch ein Vergleich mit Temperaturen, die im wasserstabilisierten Hochleistungsbogen (Zusammensetzung des Bogengases Wasserstoff und Sauerstoff im Verhältnis 2 : 1 bei  $p = 1\text{ Atm}$ ) bei einem Strom von 1500 A gemessen wurden <sup>7</sup>. Bei dieser außerordentlich hohen Stromstärke, die fast den Spitzenwert unseres Stromimpulses erreicht ( $\approx 1800\text{ A}$ ), betrug die gemessene Achsentemperatur  $52\,000\text{ }^{\circ}\text{K}$ , was mit der von uns gefundenen maximalen Temperatur gut übereinstimmt.

<sup>19</sup> H. R. GRIEM, Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill Book Co., New York 1964.

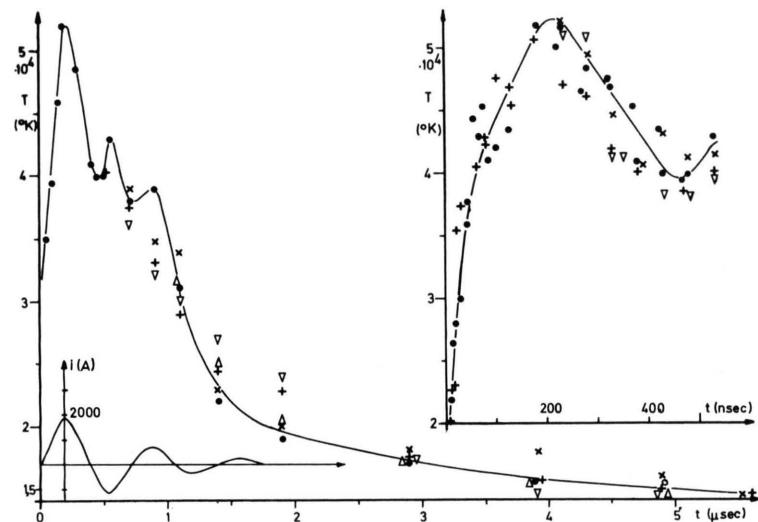


Abb. 11. Zeitlicher Temperaturverlauf in der Kanalachse bei zwei verschiedenen Zeitauflösungen. Zum Vergleich dazu eingezeichneter Stromverlauf im Funken. Die Bedeutung der eingetragenen Meßwerte ist im Text erklärt.

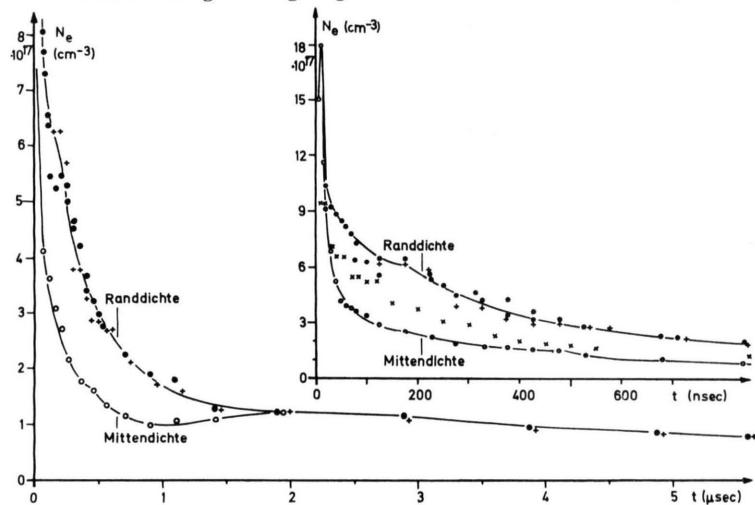


Abb. 13. Zeitlicher Verlauf der Elektronendichte  $N_e$  im Dichtemaximum am Rand (Randdichte) und in der Kanalachse (Mittendichte); die Bedeutung der eingetragenen Meßwerte ist im Text erklärt.

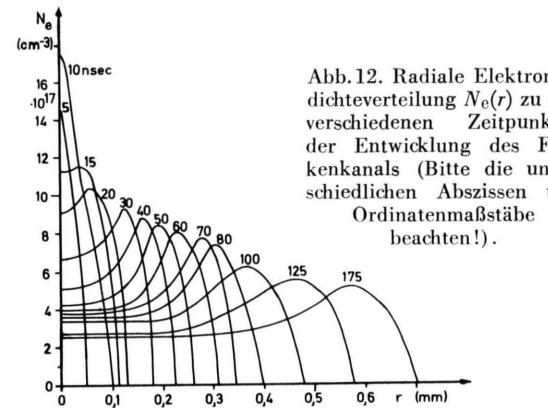


Abb. 12. Radiale Elektronendichteverteilung  $N_e(r)$  zu den verschiedenen Zeitpunkten der Entwicklung des Funkenkanals (Bitte die unterschiedlichen Abszissen und Ordinatenmaßstäbe beachten!).

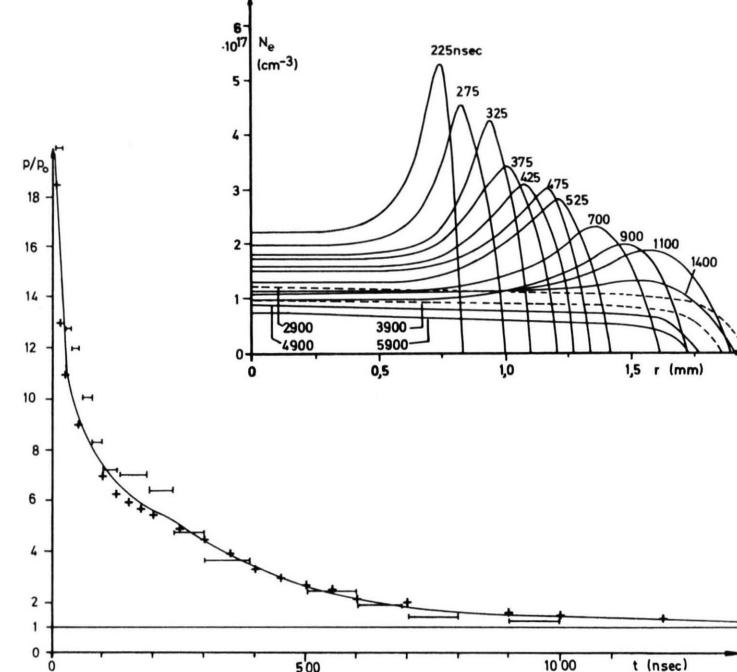


Abb. 14. Zeitlicher Druckverlauf im Funkenkanal ( $p_0 = 460$  Torr). + Werte aus der Elektronendichte bestimmt; |----| Werte aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit nach 12 bestimmt.

*b) Bestimmung der ElektronendichteVerteilung im Funkenkanal*

Für die Messung der radialen ElektronendichteVerteilung benutzten wir zwei Verfahren:

1. Ermittlung der radialen Verteilung der Halbwertsbreite von  $H_\beta$ . Diese Messung liefert über Gl. (27) oder Abb. 28 (s. Anhang) absolute Werte für die Elektronendichte  $N_e$ . Leider ist jedoch die Bestimmung der Linienbreite im heißen Kanalinneren nur mit großer Unsicherheit möglich, da die aus dem Kanalinneren emittierte Intensität gegenüber der Randintensität sehr gering ist und deshalb nur ungenau bestimmt werden kann (s. auch Abschnitt II d und Abb. 8 a, b). Genaue Werte für die Halbwertsbreite von  $H_\beta$  erhält man jedoch in der Randzone mit  $r = r^*$ , wo  $T = T_{L^*}$  ist, und die Linie optimal angeregt wird. Die in dieser Zone gemessenen „Randdichten“ werden zur Eichung der mit dem nächsten Verfahren gemessenen  $N_e(r)$ -Verteilungen benutzt.

2. Der ElektronendichteVerlauf  $N_e(r)$  kann aus dem Verlauf der Kontinuumsintensität  $\mathcal{E}_k(r)$  berechnet werden. Da im Wasserstoffplasma  $N_e = N_i$  ist, ergibt sich aus Gl. (26) des Anhangs:

$$N_e = \sqrt{\mathcal{E}_k(r) / V A(\lambda, T(r))}.$$

Bei der Berechnung von  $N_e(r)$  kann  $\sqrt{V A(\lambda, T(r))}$  in 1. Näherung als konstant betrachtet werden, denn diese Größe ändert sich zwischen  $2 \cdot 10^4$  und  $5 \cdot 10^4$  °K nur um etwa 10% (für  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ). Da eine Absolutmessung von  $\mathcal{E}_k(r)$  nicht erfolgte, erhält man zunächst einen relativen Verlauf für  $N_e(r)$ , der mit den aus der  $H_\beta$ -Verbreiterung gemessenen Randdichten auf absolute  $N_e$ -Werte geeicht wurde. Die gleiche Methode wurde in einer früheren Arbeit<sup>6</sup> bei der Ausmessung des radialen DichteVerlaufs in einem stationären Kohlebogen angewandt.

In Abb. 12 sind die so gewonnenen ElektronendichteVerteilungen  $N_e(r)$  zu den verschiedenen Zeitpunkten der Entwicklung des Funkenkanals aufgetragen. Dabei wurde auch die leichte Temperaturabhängigkeit von  $\sqrt{V A(\lambda, T(r))}$  berücksichtigt, da  $T(r)$  nach Abb. 10 bekannt ist.

In Abb. 13 ist der zeitliche Verlauf der Elektronendichte aufgetragen worden, und zwar sowohl der Verlauf der maximalen Dichte in der Randschicht (Randdichte) als auch die Abhängigkeit der Elektronendichte in der Kanalmitte (○ Mittendichte). Die eingetragenen Meßwerte im Randdichtenverlauf wurden mit Hilfe der zwei beschriebenen Verfahren gewonnen (+ aus der Halbwertsbreite von  $H_\beta$  und

● aus dem Verlauf des Kontinuums). Wird die Halbwertsbreite von  $H_\beta$  ohne radiale Auflösung gemessen (wie in II d beschrieben), so erhält man aus den über die Schichttiefe gemittelten Profilen (Abb. 9) eine mittlere Elektronendichte, deren Meßwerte zwischen Rand- und Mittendichte liegen (× in Abb. 13).

Eine eingehendere Diskussion des Verhaltens von Temperatur und Dichte erfolgt im nächsten Abschnitt IV.

*c) Zeitlicher Druckverlauf im Funkenkanal*

Aus dem gemessenen Verlauf der Elektronendichte und der Temperatur im Funkenkanal kann nun durch Auflösung von Gl. (21), (23) (s. Anhang) der Druck im Funkenkanal berechnet werden.

Benutzt man bei der Berechnung die maximale Randdichte, so muß  $T$  gleich der Normtemperatur der Elektronendichte  $T_e^*$  gesetzt werden. Der auf diese Weise gewonnene zeitliche Druckverlauf im Funkenkanal ist in Abb. 14 normiert auf  $p_0 = 460$  Torr aufgetragen.

In Abb. 14 wurde ebenfalls der Druckverlauf eingetragen, der sich aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit über Gl. (2) berechnen läßt<sup>12</sup>. Beide Verfahren liefern näherungsweise den gleichen Druckverlauf. Dabei muß noch berücksichtigt werden, daß Gl. (2) zur Druckberechnung nicht anwendbar ist, wenn die Aufweitung des Funkenkanals stagniert, wie das z. B. zwischen erster und zweiter Stromhalbwelle der Fall ist.

*d) Ionisierungsgrad im Funkenplasmakanal*

Der Ionisierungsgrad im Funkenplasmakanal  $J = N_i / (N_i + N_0)$  läßt sich berechnen, da  $N_i$  (=  $N_e$ ) und die Temperatur gemessen wurden, und deshalb bei bekanntem Druck  $p$  über Gl. (22) des Anhangs auch die Neutralteilchendichte  $N_0$  berechenbar ist.

In Abb. 15 wurde der Verlauf von  $J(r)$  zu einigen Zeitpunkten aufgetragen. Man sieht, daß während der Zeit der Energieeinspeisung bis zu etwa 1  $\mu\text{sec}$  der Ionisierungsgrad im Kanalinneren nahezu eins ist und erst in der Abkühlungsphase wieder langsam absinkt.

*e) Leitfähigkeit und Stromdichte im Funkenkanal*

Die spezifische Leitfähigkeit eines vollionisierten thermischen Plasmas ergibt sich nach<sup>20</sup> zu:

<sup>20</sup> L. J. R. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, Inc., New York 1956.

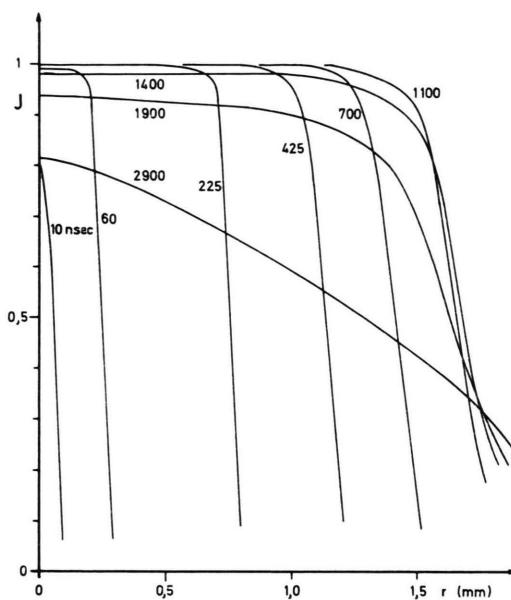


Abb. 15. Radialer Verlauf des Ionisierungsgrades  $J(r)$  zu den verschiedenen Zeitpunkten der Entwicklung des Funkenkanals.

$$\eta = 153 \cdot T^{3/2} / \ln \Lambda \quad [\Omega \cdot \text{cm}]^{-1}, \quad (3)$$

wobei die Temperatur in  $10^4 \text{ }^\circ\text{K}$  und die in  $\ln \Lambda$  auftretende Elektronendichte  $N_e$  in  $10^{17} \text{ cm}^{-3}$  einzusetzen sind. In die im COULOMB-Logarithmus auftretende Größe  $\Lambda$ ,

$$\Lambda = (4 k T / e^2) l_{\text{eff}}, \quad (4)$$

geht die effektive Reichweite des Ionenfeldes  $l_{\text{eff}}$  ein, die den Stoßquerschnitt des Ions bestimmt. Wir haben für unsere Leitfähigkeitsberechnung  $l_{\text{eff}} = N_i^{-1/3}/6$  nach BURKHARDT<sup>21</sup> benutzt.

SPITZER<sup>20</sup> benutzt hierfür die DEBYE-Länge. CHAPMAN und COWLING<sup>22</sup> verwenden ein  $l_{\text{eff}} = N_i^{-1/3}$ , das also gleich dem mittleren Ionenabstand ist. MAECKER<sup>7</sup> benötigt ein  $l_{\text{eff}} = N_i^{-1/3}/4$ , um seine gemessenen Leitfähigkeiten mit der Theorie in Einklang zu bringen.

$\Lambda$  wird dann:

$$\Lambda = 9 \cdot T / N_e^{-1/3} \quad (T \text{ in } 10^4 \text{ }^\circ\text{K} \text{ und } N_e \text{ in } 10^{17} \text{ cm}^{-3}). \quad (5)$$

Wie Abb. 15 zeigt, ist die Annahme der Vollandionisierung sehr gut erfüllt. Mit den gemessenen  $T(r, t)$  in  $N_e(r, t)$ -Verläufen lässt ich nun nach Gl. (3), (5) die spezifische Leitfähigkeit des Funkenkanals  $\eta(r, t)$

berechnen. Aus  $\eta(r, t)$  und dem gemessenen Gesamtstrom  $i(t)$  ergibt sich die Stromdichte im Kanal  $j(r, t)$ :

$$j(r, t) = \eta(r, t) \cdot i(t) / d \cdot G(t) \quad \text{A/cm}^2 \quad (6)$$

$$\text{wobei } G(t) = \int_0^{R_0(t)} (2 \pi r / d) \eta(r, t) dr \quad \Omega^{-1} \quad (7)$$

die Gesamtleitfähigkeit des Funkens ist ( $d$  = Funkenlänge).

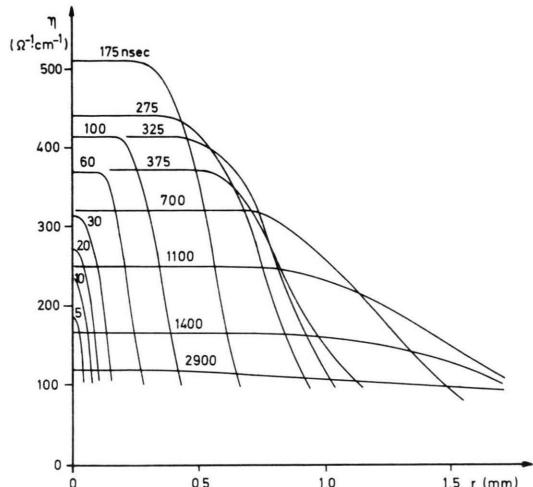


Abb. 16. Radialer Verlauf der Leitfähigkeit  $\eta(r)$  des Funkenplasmas zu verschiedenen Zeitpunkten der Kanalentwicklung.

Abb. 16 zeigt den radialen Verlauf von  $\eta(r)$  zu verschiedenen Zeiten der Funkenentwicklung, dagegen ist in Abb. 17 der zeitliche Verlauf der Stromdichte in der Kanalachse ( $r = 0$ ) sowie der zeitliche Verlauf der Gesamtleitfähigkeit  $G(t)$  des Kanals aufgetragen. Der radiale Verlauf der Stromdichte  $j(r)$  ist proportional zu  $\eta(r)$ . In<sup>13</sup> wurde von ANDREEV und ORLOV der zeitliche Verlauf von Entladungsstrom und Kanalradius für einen Funken in Luft berechnet. Für die Anpassung des berechneten Stromverlaufs an den gemessenen benötigten sie eine spezifische Leitfähigkeit  $\eta = 300 (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$ , die während der ersten Stromhalbwelle zeitlich und örtlich konstant gesetzt wurde. Berechnen wir aus unserem gemessenen Verlauf von  $G(t)$  (Abb. 17) zunächst eine radial gemittelte Leitfähigkeit

$$\eta(t) = d \cdot G(t) / \pi \cdot R_0(t)^2$$

<sup>21</sup> G. BURKHARDT, Ann. Phys. Leipzig **5**, 373 [1950].

<sup>22</sup> S. CHAPMAN u. T. G. COWLING, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge University Press, London 1960.

und mitteln diese dann noch über die Zeit der ersten Stromhalbwelle, so ergibt sich eine mittlere spezifische Leitfähigkeit  $\bar{\eta} = 290 \text{ } (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$ , die mit der in <sup>13</sup> benutzten näherungsweise übereinstimmt.

#### IV. Diskussion der Meßergebnisse

##### a) Thermalisierung des Funkenplasmas

Die beschriebenen Experimente und deren Ergebnisse haben gezeigt, daß die Aufweitung des Funkenkanals bei einem minimalen Durchmesser von etwa 0,1 mm beginnt (siehe z. B. Abb. 4). Dabei beträgt zu Beginn dieser Entwicklung die Elektronendichte in diesem dünnen Faden etwa  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$  (in Abb. 12 Zeitpunkt 5, 10 nsec), und die Temperatur liegt bei etwa  $20\,000 \text{ } ^\circ\text{K}$ . Im Kanal herrscht ein Anfangsdruck von  $p \cong 20 \cdot p_0$  (Abb. 14). Wir wollen im folgenden abschätzen, inwieweit unter solchen Bedingungen das in diesem dünnen Faden enthaltene Gas, das aus Elektronen, Ionen und Neutralatomen besteht, ein thermisches Plasma darstellt. Zur Abschätzung der erforderlichen Einstellzeiten haben wir die von GRIEM <sup>19</sup> berechneten Näherungsformeln benutzt.

Die Einstellzeit  $\tau_B$  für die thermische Besetzung des Grundzustandes des H-Atoms ist länger als die aller anderen höheren Energieniveaus und beträgt zu Beginn der Entwicklung des Funkenkanals bei  $N_e \cong 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  und  $T = 2 \cdot 10^4 \text{ } ^\circ\text{K}$  etwa  $\tau_B = 1 \text{ nsec}$ .  $\tau_B$  überschreitet auch in späteren Zeiten der Funkenentwicklung, wo  $N_e$  auf  $10^{17} \text{ cm}^{-3}$  gefallen ist, nicht den Wert von 10 nsec. Diese kurze Einstellzeit bedingt, daß bereits zu Beginn der Kanalaufweitung in dem dünnen Faden ein thermisch besetztes Plasma vorliegt, und daß diese thermische Besetzung der Energieniveaus den auftretenden Temperaturänderungen unmittelbar folgt, da die Einstellzeit klein gegen die Änderungszeit dieser Größe ist.

Die Relaxationszeit  $\tau_T$  der Aufheizung des Gases (Ionen und Neutralatome) läßt sich abschätzen zu:

$$\tau_T \cong (M/m)/v \sigma N_e, \quad (8)$$

wobei  $v$  die thermische Geschwindigkeit der Elektronen,  $\sigma$  der Wirkungsquerschnitt für Elektron-, Atom- bzw. Elektron-, Ionstöße ist, und  $m/M$  den Bruchteil der bei einem Stoß übertragenen Energie angibt. In Abb. 18 haben wir diese Relaxationszeit  $\tau_T$ , die zur Aufheizung der Neutralteilchen und der Ionen erforderlich ist, als Funktion der Elektronendichte  $N_e$  aufgetragen. Bei kleinem Ionisierungsgrad  $I < 1\%$  wird man für  $\sigma$  zunächst näherungsweise den gaskinetischen Querschnitt  $\sigma_g$  benutzen, während im

vollionisierten Plasma der Ionenquerschnitt

$$\sigma_i = 3 \cdot 10^{-15} \cdot (E_i/k T)^2,$$

( $E_i = 13,6 \text{ V}$  Ionisierungsspannung des H-Atoms) zu verwenden ist <sup>20</sup>. Man erhält mit  $\sigma_i$  sehr viel kürzere Einstellzeiten, da  $\sigma_i \gg \sigma_g$  ist. Ist das Gas partiell ionisiert mit  $I > 1\%$ , dann erfolgt die Energieübertragung der Elektronen zunächst auf die Ionen und von diesen sofort auf die Neutralteilchen, wodurch das schnellere Abfallen von  $\tau_T$  in Abb. 18 verursacht wird. Das bedeutet, im partiell ionisierten Plasma ist die Einstellzeit für die Aufheizung des Neutralgases umgekehrt proportional zum Ionisierungsgrad  $I$ . Für die Abschätzung von  $\tau_T$  wird dann für  $\sigma$  der Wert von  $\sigma_i$  benutzt und Gl. (8) noch mit  $1/J$  multipliziert <sup>19</sup>. Eine genaue Berechnung der Relaxationszeit  $\tau_T$  für ein vollionisiertes H-Plasma, die von SPITZER durchgeführt wurde <sup>20</sup>, liefert größtenteils den gleichen Wert wie die Abschätzung nach Gl. (8) mit  $\sigma = \sigma_i$ .

An Hand von Abb. 18 soll nun die Thermalisierung unseres Funkenplasmas verfolgt werden. Bei der Stromsteigerung im Funken durchläuft im Vorentladungskanal die Elektronendichte  $N_e$  den Bereich von  $10^{12}$  bis zu einigen  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  innerhalb von einigen 10 nsec im Fall unserer experimentellen Bedingungen. Eine Aufheizung des Gases ist in dieser Entladungsphase nicht möglich, da die Relaxationszeit wesentlich größer als die Entwicklungszeit des Funken ist. Steigt nun in gewissen Bereichen des Vorentladungskanals die Elektronendichte auf  $10^{17} \text{ cm}^{-3}$  an, so wird ein Ionisierungsgrad von  $> 1\%$  erreicht, da die Dichte des noch nicht aufgeheizten Gases  $1,5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  beträgt. Von diesem Zeitpunkt an sinkt mit zunehmendem Ionisierungsgrad die Thermalisierungszeit sehr viel schneller mit wachsendem  $N_e$  und erreicht bei  $N_e = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  die Größenordnung von 1 nsec. Dieses Dichteintervall wird innerhalb von  $\cong 10$  nsec durchlaufen, und in dieser kurzen Zeit erfolgt eine Aufheizung von Ionen und Neutralteilchen in dem dünnen Plasmafaden und damit verbunden die Ausdehnung dieses Kanals. Infolge dieser Ausdehnung wächst die Elektronendichte nicht wesentlich über  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$ , obgleich der Ionisierungsgrad  $J$  innerhalb von 10 nsec auf 0,8 ansteigt.  $J$  nähert sich in den folgenden 50 nsec nahezu dem Wert eins.

Die weitere Entwicklung des Funkenplasmas soll jetzt an Hand der Kurvenschar  $N_e = f(T, p)$  [siehe Gl. (21)] diskutiert werden.

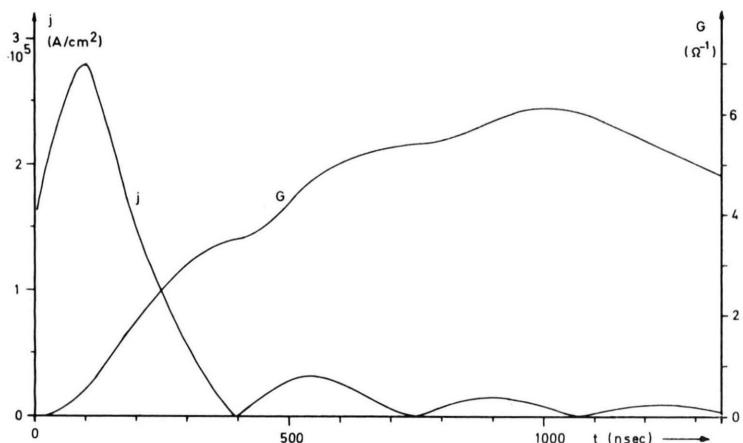


Abb. 17. Zeitlicher Verlauf der Stromdichte  $j(t)$  bei  $r=0$  (in der Kanalachse) und der Gesamtleitfähigkeit  $G(t)$  des Funkenkanals.

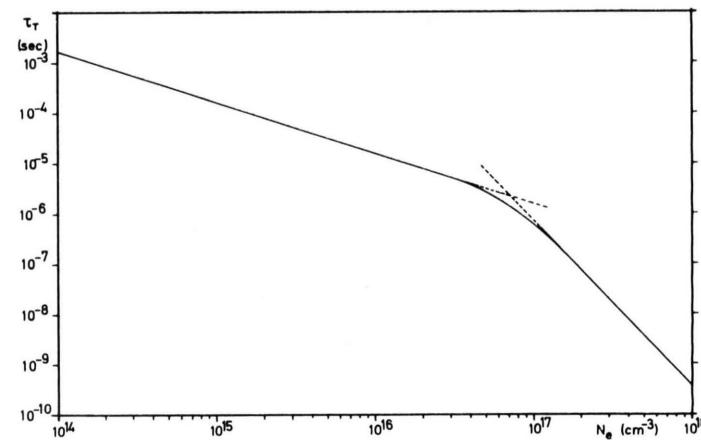


Abb. 18. Relaxationszeit  $\tau_T$  der Aufheizung des Neutral- bzw. Ionengases als Funktion der Elektronendichte.

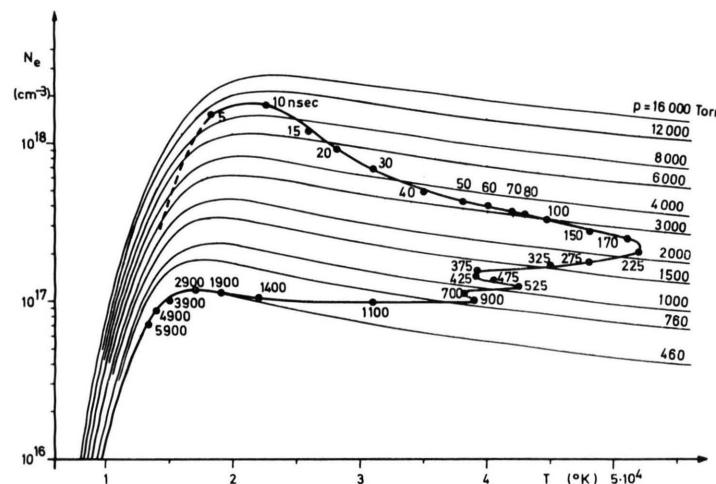


Abb. 19. Elektronendichte  $N_e$  als Funktion der Temperatur  $T$  mit dem Gesamtdruck  $p$  als Parameter; stark ausgezogen wurde in diese Kurvenschar die „Funkenkennlinie“ eingezeichnet (Erklärung hierzu s. im Text).

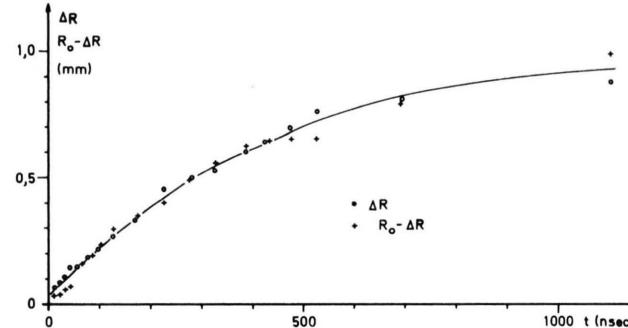


Abb. 20. Breite von Randschicht  $\Delta R$  und Radius des Kerns  $R_0 - \Delta R$  als Funktion der Zeit.

### b) Funkenkennlinie

Zu diesem Zweck wurde in Abb. 19 die Elektronendichte  $N_e$  als Funktion der Temperatur  $T$  mit dem Gesamtdruck  $p$  als Parameter aufgetragen. Dann wurde in Abb. 19 stark ausgezogen eine Kurve eingezeichnet, die den gemessenen Verlauf von Elektronendichte und Temperatur in der Kanalachse wiedergibt. Als Parameter steht an dieser Kurve die Zeit  $t$  in nsec, zu der das entsprechende  $T, N_e$ -Paar in der Kanalachse vorlag. Es ist klar, daß mit  $T$  und  $N_e$  auch der Gesamtdruck  $p$  zu diesem Zeitpunkt eindeutig festgelegt ist. Diese Kurve wollen wir als Funkenkennlinie bezeichnen.

Wenn wir unsere Betrachtung bei 5 bis 10 nsec beginnen, so sind die physikalischen Anfangsbedingungen des Funkenkanals festgelegt durch  $N_e = 1,8 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ,  $T = 18\,000$  bis  $23\,000 \text{ }^\circ\text{K}$  und  $p \cong 20 \cdot p_0$ . Die Funkenkennlinie zeigt nun, daß in der folgenden Phase der Kanalentwicklung bis zum Strommaximum der ersten Halbwelle bei  $\cong 200$  nsec mit wachsender Temperatur die Elektronendichte in der Kanalachse rasch abnimmt. Dies liegt, wie Abb. 19 zeigt, einerseits an der Druckabnahme im Kanal infolge der thermischen Ausdehnung des Kanals und andererseits an der Temperatursteigerung im Kanalinneren. Beide Effekte wirken in die gleiche Richtung und sorgen für einen sehr raschen Dichteabfall. Nach Überschreiten des Temperaturmaximums von  $52\,000 \text{ }^\circ\text{K}$  bei  $\cong 200$  nsec sinkt die Dichte in der Kanalachse langsamer ab, denn jetzt wird der weitere Abfall nur noch durch die Druckabnahme verursacht, da der Kanal sich weiter aufweitet. Vom Beginn bis zum Maximum der zweiten Stromhalbwelle steigt die Temperatur wieder von  $40\,000$  auf  $43\,000 \text{ }^\circ\text{K}$  an, und da der Druck noch weiter abfällt, ergibt sich jetzt wieder ein schnelleres Sinken der Dichte in der Kanalachse. Es wird empfohlen, dieses dynamische Verhalten des Funkenkanals auch an Hand der Abb. 11, 13 und 14, wo  $T, N_e$  und  $p$  als Funktion der Zeit aufgetragen sind, zu verfolgen. Nach Ablauf der dritten Stromhalbwelle ist die Energieeinspeisung in den Funkenkanal zu vernachlässigen, und da zu diesem Zeitpunkt (etwa bei  $1 \mu\text{sec}$ ) der Druck im Funkenkanal noch  $\cong 1,5 \cdot p_0$  beträgt, vergrößert sich der Durchmesser des Kanals bis zu etwa  $1,4 \mu\text{sec}$  hin noch weiter. Die hierfür in der Randzone benötigte Ionisierungsenergie, thermische Energie und Ausdehnungsarbeit wird der thermischen Energie des Kanalinneren entzogen. (Es be-

steht bis zum völligen Druckausgleich eine gerichtete Driftbewegung heißer Teilchen aus dem Kanalinneren in die kalte Randzone.) Dadurch fällt zwischen  $1$  und  $1,4 \mu\text{sec}$  die Temperatur im Kanalinneren rasch ab. Die Dichte im Kanalinneren bleibt dabei nahezu konstant, denn der Dichteanstieg infolge des Temperaturabfalls wird durch den noch vorhandenen schwachen Druckabfall kompensiert.

Für  $t > 1,4 \mu\text{sec}$  ist der Druck im Kanal praktisch gleich dem Außendruck des ungestörten Gases. In Abb. 19 nähert sich nun die Funkenkennlinie der Kurve  $N_e = f(T)$  mit  $p = p_0 = 460$  Torr. Ist zu diesem Zeitpunkt die Temperatur  $T$  in der Kanalachse noch größer als die Normtemperatur der Elektronendichte  $T_e^* = 17\,000 \text{ }^\circ\text{K}$  bei 460 Torr, dann wird beim weiteren Abkühlen des Plasmas infolge Wärmeleitung die Dichte  $N_e$  im Kanalinneren bis zum Erreichen der Normtemperatur wieder ansteigen und erst für  $T < T_e^*$  endgültig absinken. Die Normtemperatur wird bei etwa  $2,9 \mu\text{sec}$  in der Kanalachse erreicht.

Abb. 13 zeigt, daß die Elektronendichte am Rand langsamer fällt als in der Mitte. Der Grund dafür liegt darin, daß die maximale Randdichte stets bei der Normtemperatur  $T_e^*$  auftritt, die nur schwach druckabhängig ist, so daß der zeitliche Abfall der Randdichte näherungsweise bei  $T = \text{const}$  erfolgt und deshalb nur vom Druckabfall im Kanal abhängt. Bei der Mittendichte kommt jedoch zusätzlich der Einfluß der Temperatursteigerung im Kanalinneren während der ersten Halbwelle hinzu, wodurch die Elektronendichte gemäß  $N_e = p/2kT$  zusätzlich abnimmt. Bei sehr frühen und sehr späten Zeiten liegt die Zone mit der (relativ niedrigen) Normtemperatur  $T_e^*$  in der Kanalachse; zu diesen Zeiten geht Mitten- und Randdichte ineinander über.

### c) Radiale Temperatur- und DichteVerteilung

Die gemessenen radialen Temperatur- und ElektronendichteVerteilungen in Abb. 10 und 12 zeigen, daß der Funkenkanal aus einem Kern von nahezu konstanter Temperatur und einer Randschicht mit einem Temperaturabfall zur Außentemperatur hin besteht. In dieser Randschicht durchläuft die Dichte der Elektronen und Ionen bei der Normtemperatur ihr Maximum. Die Breite dieser Randschicht nimmt mit wachsender Zeit zu, am stärksten zu Beginn der Kanalaufweitung. Dies liegt offenbar an der größeren Wärmeableitung zu Beginn der Entwicklung infolge des steileren Temperaturgradienten. In Abb. 20 ha-

ben wir die Randschichtdicke  $\Delta R$  – definiert als Intervall, in dem die Temperatur von 95% des Maximalwertes in der Mitte auf 10 000 °K abfällt – und den Radius des Kerns ( $R_0 - \Delta R$ ) ( $R_0$  = Radius, bei dem  $T = 10 000$  °K vorliegt) als Funktion der Zeit dargestellt. Während der Zeit der Energieeinspeisung bis zu etwa  $t = 1 \mu\text{sec}$  ergibt sich daraus, daß der Radius des Kerns und die Breite der Randschicht etwa gleich groß sind. Die Annahme konstanter Temperatur über den Kanalquerschnitt, wie sie in früheren Arbeiten<sup>12, 13</sup> zum Teil gemacht wurde, ist deshalb nur näherungsweise richtig.

Die Randschicht stellt die Kontaktzone zwischen dem heißen Funkenplasma und dem kalten Außengas dar. Da während der eigentlichen Aufweitungsphase des Kanals der Ionisierungsgrad im Kanal fast 1 ist, kann während dieser Zeit Ionisation nur in dieser Randschicht erfolgen. Inwieweit in der Randschicht die Ionisierungsrate die Rekombinationsrate überwiegt, kann man ermitteln, wenn man die zeitliche Zunahme der Gesamtelektronenzahl im Plasmakanal berechnet:

$$n_e(t) = \int_0^{R_0(t)} 2\pi r \cdot N_e(r, t) dr \quad \text{Elektronen/cm.} \quad (9)$$

Die Integration über die  $N_e(r)$ -Verläufe wurde numerisch durchgeführt, und das Ergebnis ist in Abb. 21 aufgetragen. Es zeigt während des Verlaufs der ersten Stromhalbwelle ein fast lineares Ansteigen von  $n_e(t)$  und danach, wenn die Energiezufuhr schwächer wird, nur noch einen langsameren Anstieg. Die maximale Elektronenzahl wird bei etwa 2  $\mu\text{sec}$  erreicht. Zu dieser Zeit ist die über den Kanalquerschnitt gemittelte Temperatur gleich der Normtemperatur  $T_e^*$  der Elektronendichte. (Der Kanalradius verändert sich zu dieser Zeit nicht mehr

wesentlich.) Nach 2  $\mu\text{sec}$  sinkt die Elektronenzahl wieder ab, da jetzt die Rekombinationsrate die Ionisierungsrate übersteigt. Im Zeitintervall zwischen 1 und 2  $\mu\text{sec}$  wird keine nennenswerte Energie dem Kanal mehr zugeführt, und die Energie für die weitere Ionisierung wird der thermischen Energie des Plasmas entzogen.

#### d) Im Funkenkanal umgesetzte Energie

Interessant ist es, wie sich die dem Kanal zugeführte Energie aufteilt in Ionisierungs- und Dissoziationsenergie, thermische Energie und Ausdehnungsarbeit. Für den Verlauf der ersten Stromhalbwelle haben wir dies im folgenden untersucht:

##### 1. Ionisierungsarbeit $E_{\text{ion}}$ :

$$E_{\text{ion}}(t) = e E_i n_e(t) \quad \text{Joule/cm Kanallänge,} \quad (10)$$

$E_i = 13,6$  Volt = Ionisierungsspannung.

##### 2. Dissoziationsarbeit $E_{\text{diss}}$ :

$$E_{\text{diss}}(t) = e E_d n_e(t)/2 \quad \text{Joule/cm Kanallänge,} \quad (11)$$

$E_d = 2,6$  Volt = Dissoziationsspannung.

##### 3. Thermische Energie $E_{\text{th}}$ :

$$E_{\text{th}}(t) = k T(n_e(t) + n_i(t)) \quad \text{Joule/cm Kanallänge,} \quad (12)$$

$n_0$  ist im Kanalinneren zu vernachlässigen.

##### 4. Ausdehnungsarbeit $E_a(t)$ :

$$E_a(t) = \int_0^{R_0(t)} p dF = 2\pi \int_0^{R_0(t)} p(t) r dr \quad \text{Joule/cm Kanallänge.} \quad (13)$$

Diese vier Energiebeiträge sind in Abb. 22 während der ersten Stromhalbwelle als Funktion der Zeit dargestellt worden.

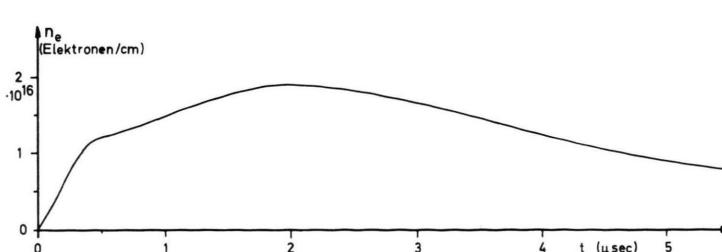


Abb. 21. Zeitlicher Verlauf der Gesamtelektronenzahl  $n_e(t)$  (pro cm Kanallänge) im Funkenkanal.

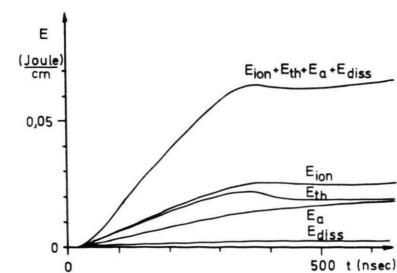


Abb. 22. Zeitlicher Verlauf von Ionisierungsarbeit  $E_{\text{ion}}$ , thermischer Energie  $E_{\text{th}}$ , Ausdehnungsarbeit  $E_a$  und Dissoziationsarbeit  $E_{\text{diss}}$  im Funkenkanal (pro cm Kanallänge).

e) *Verlauf der Gesamtteilchendichte im Funkenkanal und in dem durch die Schockwelle gestörten Gebiet*

Zum Abschluß der Diskussion soll noch eine Berechnung der radialen Verteilung der Gesamtteilchendichte

$$N_{\text{ges}} = N_e + N_i + N_0 \quad (14)$$

im Kanalinneren und eine Extrapolation auf das schockgestörte Gebiet durchgeführt werden. Ist zu einem gegebenen Zeitpunkt der Druck  $p$  im Funkenkanal und die radiale Temperaturverteilung  $T(r)$  bekannt, dann kann über Gl. (21), (22) auch die radiale Verteilung der Dichte der Neutralteilchen  $N_0$  berechnet werden. Als Beispiel wurde in Abb. 23 für den Zeitpunkt  $t = 425$  nsec die Verteilung der einzelnen Komponenten aufgetragen, und daraus der Verlauf der Gesamtdichte eingezeichnet. Eine Berechnung von  $N_0$  und damit auch von  $N_{\text{ges}}$  ist jedoch nur bis zum Kanalrand möglich, der etwa durch die Temperaturgrenze von  $10^4$  °K festgelegt ist. Außerhalb dieses Kanalrandes ist die Messung von Elektronendichte und Temperatur mit den hier verwendeten spektroskopischen Methoden nicht möglich, da aus diesem Bereich keine Strahlung mehr emittiert wird.

Information über das den Funkenkanal umgebende Gas erhält man durch Anwendung des TÖPLERSchen Schlierenverfahrens, kombiniert mit Bildwandler-Wischaufnahmen. Eine solche Schlierenwisaufnahme des sich aufweitenden Funkenkanals ist in Abb. 24 \* wiedergegeben. In dieser Aufnahme ist die Schliere der sich ausbreitenden zylindrischen Schockwelle erkennbar, auf deren Frontseite das Gas noch ungestört ist, und bei dem in unserem Falle vorliegenden Druck von  $p = 460$  Torr eine Dichte von  $N_{\text{ges}}^0 = 1,52 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  besitzt. Aus den bekannten Schockgleichungen läßt sich nun die Dichte des Gases hinter der Schockfront  $N_{\text{ges}}$  als Funktion der Schockwellengeschwindigkeit berechnen<sup>23</sup>:

$$N_{\text{ges}}/N_{\text{ges}}^0 = M^2/(1 - \mu + \mu M^2) \quad (15)$$

mit  $\mu = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ ;  $\gamma = c_p/c_v = 1,4$  für  $\text{H}_2$ ;  $M = v_s/c_0 =$  Verhältnis von Schockgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit im ungestörten Gas (MACH-Zahl).

Da  $v_s(t)$  aus der Schlierenaufnahme leicht zu ermitteln ist, läßt sich die Teildichte hinter der

Schockfront nach Gl. (15) berechnen. Im sehr starken Schock ( $p/p_0 \gg 1$ ) ergibt sich die maximale Kompression zu

$$N_{\text{ges}}/N_{\text{ges}}^0 = 1/\mu = (\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 6 \text{ für } \gamma = 1,4. \quad (16)$$

Dieser Fall wird bei uns näherungsweise nur zu Beginn der Kanalentwicklung erreicht.

In Abb. 24 ist zwischen Kanalrand und Schockfront eine weitere Schliere erkennbar. Die Ablenkung der Lichtstrahlen in diesem Gebiet zeigt, daß dort ebenfalls ein hoher Dichtegradient vorliegt, dessen Vorzeichen gegenüber dem in der Schockfront umgekehrt sein muß. In dieser Hülle findet also ein steiler Dichteabfall statt. Diese sogen. Hülle des Kanals wurde bereits von anderen Autoren gefunden<sup>24, 25</sup>. Aus diesen Informationen — Teildichte hinter der Schockfront, steiler Dichteabfall in der Hülle und berechneter Dichteverlauf bis zum Kanalrand — läßt sich nun näherungsweise auch der Dichteverlauf im schockgestörten Gebiet darstellen. Dies ist in Abb. 23 durchgeführt worden. Der Verlauf im Gebiet zwischen Hülle und Schockfront wurde so dargestellt, daß er mit Berechnungen von BRAGINSKII<sup>12</sup> und Überlegungen von DRABKINA<sup>11</sup> übereinstimmt.

In Abb. 25 haben wir noch die Gesamtteilchendichte im Kanal und im schockgestörten Gebiet zu den verschiedenen Zeitpunkten der Kanalentwicklung aufgetragen. Zu Beginn der Kanalaufweitung, wo am Kanalrand noch ein steiler Temperaturgradient besteht, sind Kanalrand und Hülle fast identisch, und sie können nicht getrennt beobachtet werden. In der Strompause zwischen erster und zweiter Halbwelle schiebt sich der Rand des selbstleuchtenden Kanals jedoch nur noch geringfügig nach außen, da in diesem Zeitintervall lediglich der Temperaturgradient am Rand abgebaut wird. Im Kanal selbst herrscht jedoch noch ein 2–3-facher Überdruck, so daß das Plasma weiter expandiert und die Hülle, die den Übergang vom heißen Plasma des Kanals geringer Dichte in das kalte Außengas hoher Dichte darstellt, weiter vor sich herschiebt. Infolgedessen ergibt sich nun eine deutliche Trennung von Hülle und Kanalrand.

<sup>24</sup> I. S. ABRAMSON, N. M. GEGETSCHKORI, S. I. DRABKINA u. S. L. MANDELSTAM, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **17**, 862 [1947].

<sup>25</sup> N. M. GEGETSCHKORI, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **21**, 493 [1951].

\* Abb 24 auf Tafel S. 1072 a.

<sup>23</sup> J. K. WRIGHT, Shock Tubes, John Wiley & Sons, Inc., New York 1961.

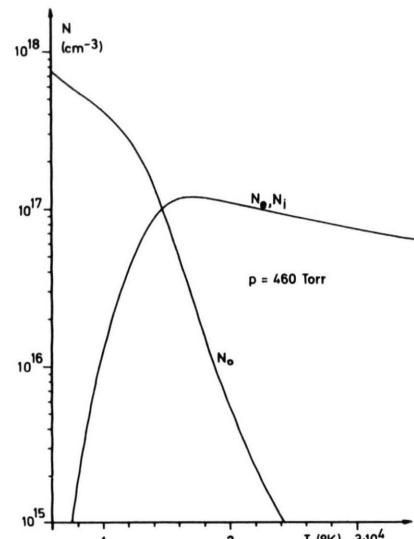


Abb. 26. Elektronen- bzw. Ionendichte  $N_e$ ,  $N_i$  und Neutralteilchendichte  $N_0$  als Funktion der Temperatur  $T$  bei  $p=460$  Torr in einem Wasserstoffplasma.

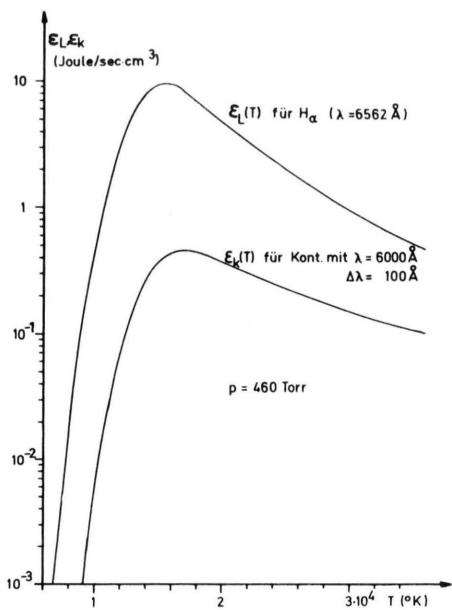


Abb. 27. Emissionskoeffizient von  $H_\alpha$  und des Kontinuums  $6000 \text{ \AA}$  als Funktion der Temperatur bei  $p=460$  Torr.

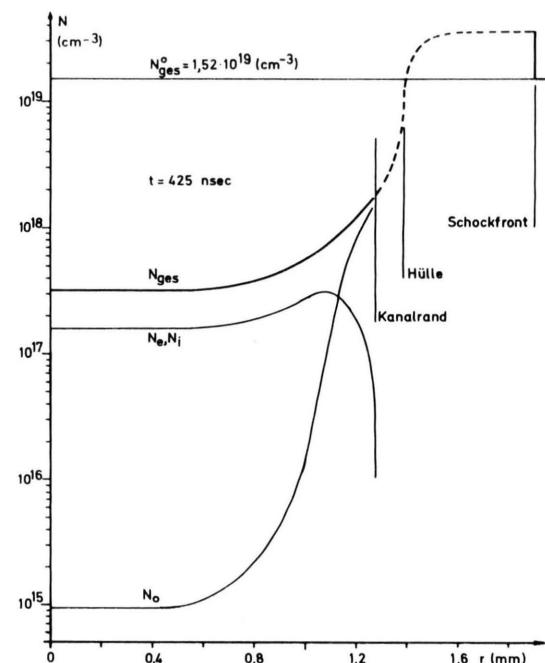


Abb. 23. Radiale Verteilung von Elektronen, Ionen-, Neutralteilchen- und Gesamtdichte ( $N_e$ ,  $N_i$ ,  $N_0$ ,  $N_{\text{ges}}$ ) im Inneren des Funkenkanals und im schockgestörten Gebiet bei  $t_0=425$  nsec.  $N^0_{\text{ges}}=1,52 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  ist die Dichte des ungestörten Gases bei  $p_0=460$  Torr und  $20^{\circ}\text{C}$ .

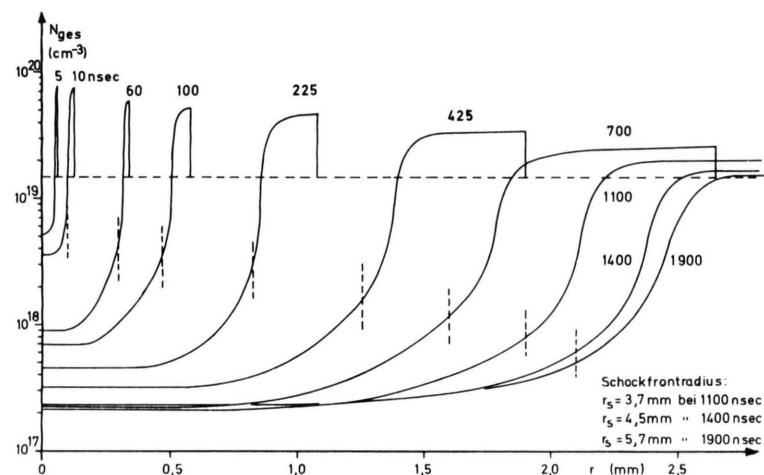


Abb. 25. Radiale Verteilung der Gesamtteilchendichte  $N_{\text{ges}}$  im Kanalinneren und im schockgestörten Gebiet zu verschiedenen Zeitpunkten der Funkenentwicklung; gestrichelt eingezeichnet der Ort des Kanalrandes ( $10^4 \text{ }^{\circ}\text{K}$  Grenze); Dichte des ungestörten Gases  $N^0_{\text{ges}}=1,52 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  ebenfalls gestrichelt eingezeichnet.

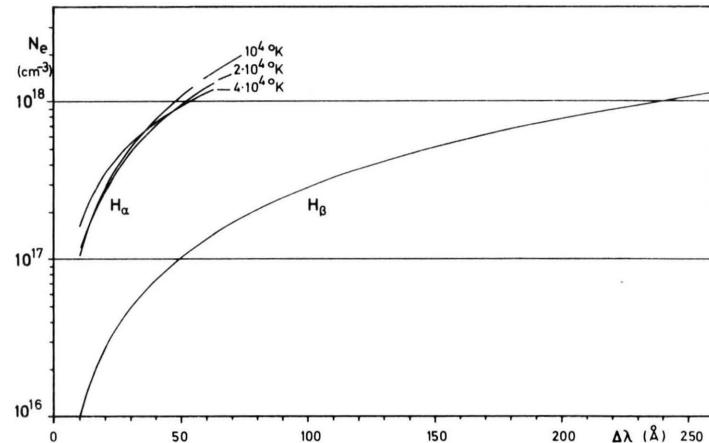


Abb. 28. Elektronendichte  $N_e$  als Funktion der (vollen) Halbwertsbreite  $\Delta\lambda$  von  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  nach 19.

Bis zu etwa 1,4  $\mu$ sec sinkt die Gesamtteilchen-dichte im Funkenkanal infolge der Druckabnahme ab. Ab 1,4  $\mu$ sec ist der Druck im Kanal praktisch gleich dem Außendruck, und nun verursacht eine weitere Temperaturabnahme durch Abkühlung wieder eine Zunahme der Gesamtteilchen-dichte.

Bei der Betrachtung von  $N_{\text{ges}}$  haben wir angenommen, daß im heißen Plasmakanal die Dichte der  $H_2$ -Moleküle zu vernachlässigen ist. Dies gilt selbst noch für den Kanalrand, denn die Dissoziation des Wasserstoffs erfolgt bei etwa 5000 °K. Im schockgestörten Gebiet dagegen ist die Temperaturerhöhung nur gering, so daß dort nur  $H_2$ -Moleküle existieren. Das Übergangsgebiet zwischen Kanalrand und Hülle ist deshalb der Bereich, in dem in zunehmendem Maße die Rekombination von H-Atomen zu  $H_2$ -Molekülen erfolgt.

## V. Anhang

### a) Berechnung der Teilchendichten

Unter der Voraussetzung thermischen Gleichgewichts lassen sich die Teilchendichten für ein Wasserstoffplasma der Ionen  $N_i$ , der Elektronen  $N_e$  und der Neutralatome  $N_0$  als Funktion vom Druck  $p$  und der Temperatur  $T$  berechnen. Die Dichte der  $H_2$ -Moleküle kann innerhalb des Funkenkanals, wo  $T > 10$  °K ist, vernachlässigt werden.

$$\text{Gesamtdruck: } p = (N_e + N_i + N_0) k T, \quad (17)$$

$$\text{Neutralitätsbedingung: } N_e = N_i, \quad (18)$$

$$\text{Elektronendruck: } p_e = N_e k T, \quad (19)$$

SAHA-Gleichung:

$$\frac{N_i}{N_0} p_e = \frac{2 g_i}{Z(T)} \left( \frac{m}{h} \right)^{3/2} (k T)^{5/2} \cdot \exp \left( - \frac{E_i - \Delta E_i}{k T} \right) = F(T). \quad (20)$$

Es bedeuten:  $g_i$  = statisches Gewicht des Ions = 1;  $Z(T)$  = Zustandssumme,  $E_i$  = 13,6 Volt = Ionisierungsspannung des H-Atoms,  $\Delta E_i$  = 0,1 Volt Absenkung der Ionisierungsspannung im Plasma.

Die Auflösung von Gl. (17) bis Gl. (20) nach  $N_e$ ,  $N_i$  und  $N_0$  liefert:

$$N_i = N_e = \frac{F(T)}{k T} \left( \sqrt{1 + p/F(T)} - 1 \right), \quad [\text{cm}^{-3}] \quad (21)$$

$$N_0 = p/k T - 2 N_e. \quad [\text{cm}^{-3}] \quad (22)$$

Aus Gl. (21) ergibt sich für hohe Temperaturen:

$$N_i = N_e = p/2 k T \quad \text{und} \quad N_0 = 0. \quad (23)$$

Für niedrige Temperaturen erhält man:

$$N_i = N_e = 0 \quad \text{und} \quad N_0 = p/k T. \quad (24)$$

Für  $p = 460$  Torr, das ist der Gasdruck, der bei unseren Experimenten vorlag, ist  $N_0$  und  $N_e$  als Funktion der Temperatur in Abb. 26 aufgetragen. Die Elektronendichte durchläuft bei der Temperatur  $T_e^*$  (Normtemperatur) ein Maximum. Für  $T < T_e^*$  sinkt der Ionisierungsgrad und damit  $N_e$  schnell ab, und  $N_0$  steigt steil an; für  $T > T_e^*$  erreicht man in zunehmendem Maße Vollarionisierung, und  $N_e$  sinkt nun wieder langsam infolge der thermischen Ausdehnung des Plasmas [s. Gl. (23)].

### b) Berechnung der Linienintensität

Die Intensität einer Spektrallinie beträgt im thermischen Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_L &= \mathcal{E}_{nm} = \int I(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{2 \pi e^2 h}{m} \cdot \frac{g_n f_{nm}}{\lambda^3 Z(T)} \cdot \exp \left\{ - \frac{E_m}{k T} \right\} N_0, \end{aligned} \quad (25)$$

$g_n$  = statist. Gewicht des unteren Zustandes,

z. B. für  $H_a$ :  $g_2 = 8$ ,

$f_{nm}$  = Absorptionsoszillatorenstärke,

z. B. für  $H_a$ :  $f_{23} = 0,64$ ,

$E_m$  = Anregungsspannung der Linie,

z. B. für  $H_a$ :  $E_3 = 12,04$  eV.

Da  $N_0$  nach Gl. (22) berechnet werden kann, läßt sich nach Gl. (25) die Temperaturabhängigkeit der Linienintensität berechnen. Abb. 27 zeigt die berechnete Intensität von  $H_a$  als Funktion der Temperatur bei  $p = 460$  Torr. Auch  $H_a$  und ebenso die weiteren BALMER-Linien  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$ , ... durchlaufen bei ihren Normtemperaturen  $T_L^*$  ein Intensitätsmaximum. Für  $T < T_L^*$  steigt zwar  $N_0$ , aber da der BOLTZMANN-Faktor sinkt, ist nur ein kleiner Bruchteil der  $N_0$ -Atome angeregt, so daß die Linienintensität fällt. Für  $T > T_L^*$  nähert sich der BOLTZMANN-Faktor dem Wert 1, dagegen sinkt die Dichte der  $N_0$  schnell ab. Die Abnahme von  $\mathcal{E}_L(T)$  ist infolge der starken Temperaturabhängigkeit des  $N_0$  (s. Abb. 26) für  $T > T_L^*$  erheblich stärker als die Abnahme von  $N_e$ . Ein heißes Wasserstoffplasma emittiert also nur noch wenig Linienstrahlung.

### c) Berechnung der Kontinuumsintensität

Das von einem Wasserstoffplasma emittierte Brems- und Rekombinationskontinuum ist proportional dem Produkt  $N_i \cdot N_e$  und läßt sich theoretisch

exakt berechnen. Für die sich ergebenden Zusammenhänge sei jedoch auf die Literatur verwiesen<sup>19</sup>. Die dort durchgeführte Berechnung ergibt für die Kontinuumsintensität  $\mathcal{E}_k$ :

$$\mathcal{E}_k = A(\lambda, T) N_e N_i. \quad (26)$$

Der Faktor  $A(\lambda, T)$  wurde in<sup>19</sup> berechnet. Er ist z. B. für das der BALMER-Serie untergelagerte Kontinuum relativ schwach temperaturabhängig, so daß die Temperaturabhängigkeit der Kontinuumsintensität hauptsächlich durch das Verhalten von  $N_e \cdot N_i = N_e^2$  bestimmt wird. Durch Zusammenfassung von Gl. (21) und Gl. (26) kann nun der Emissionskoeffizient des Kontinuums  $\mathcal{E}_k$  als Funktion von  $T$ ,  $p$  und  $\lambda$  berechnet werden. In Abb. 27 ist als Beispiel  $\mathcal{E}_k(T)$  bei  $p = 460$  Torr und  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  aufgetragen worden. Man sieht, daß  $\mathcal{E}_k(T)$  bei  $T = T_k^* \cong T_e^*$  ebenfalls ein Maximum durchläuft. Die Abhängigkeit von  $\mathcal{E}_k(T)$  ist für  $T > T_k^*$  erheblich schwächer als die von  $\mathcal{E}_L(T)$  infolge der gegenüber  $N_0(T)$  schwächeren Temperaturabhängigkeit von  $N_e(T)$ <sup>2</sup>.

#### d) Verbreiterung der Wasserstofflinien

Die Verbreiterung der Wasserstofflinien beruht auf dem linearen STARK-Effekt, d. h. auf der Aufhebung der  $2n^2$ -fachen Entartung der Wasserstoffniveaus infolge der im Plasma vorliegenden elektrischen Mikrofelder der Ionen und Elektronen. Die Grundlage der Linienverbreiterungstheorie stellt im wesentlichen die statistische Theorie von HOLTS MARK<sup>26</sup> dar. Eine Darstellung der Theorie, auf die hier nicht im einzelnen eingegangen werden soll, ist in<sup>19, 26–28</sup> zu finden. Nach<sup>19</sup> besteht zwischen der Elektrodendichte  $N_e$  und der vollen Halbwertsbreite  $\Delta\lambda$  einer durch den STARK-Effekt verbreiterten Linie der Zusammenhang:

$$N_e = C(N_e, T) \cdot \Delta\lambda^{3/2}. \quad (27)$$

Der Faktor  $C(N_e, T)$  hat für jede BALMER-Linie einen anderen Wert und hängt jedoch nur schwach von der Dichte  $N_e$  und der Temperatur  $T$  ab. Der Faktor  $C(N_e, T)$  ist in<sup>19</sup> als Funktion von  $N_e$  und  $T$  tabelliert. In Abb. 28 wurde die aus Gl. (27) berechnete Elektronendichte  $N_e$  als Funktion von  $\Delta\lambda$  für  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  aufgetragen. Bei Elektronendichten zwischen  $10^{18}$  und  $10^{17} \text{ cm}^{-3}$ , wie sie in unserem

Fall vorkommen, ändert sich die Halbwertsbreite von  $H_\beta$  von  $240 \text{ \AA}$  auf  $50 \text{ \AA}$  und die von  $H_\alpha$  von  $50 \text{ \AA}$  auf  $10 \text{ \AA}$ .

Die Form der Profile von  $H_\alpha$  und  $H_\beta$  unterscheidet sich wesentlich. Bei der Verbreiterung von  $H_\alpha$  durch STARK-Effekt tritt eine unverschobene Mittkomponente auf, die bei  $H_\beta$  fehlt. Während  $H_\alpha$  in der Linienmitte maximale Intensität besitzt, sollte theoretisch die Intensität von  $H_\beta$  in der Linienmitte auf Null absinken. Experimentell macht man sich dieses Absinken als Einsattelung im Linienzentrum bemerkbar. Diese Erscheinung ist an den Profilen für  $H_\beta$  in Abb. 9 gut erkennbar.

#### e) Numerische Lösung der ABELSchen Integralgleichung

Für die Berechnung der Radialverteilung des Emissionskoeffizienten  $\mathcal{E}(r)$  aus der gemessenen Intensitätsverteilung  $B(y)$  haben wir zwei verschiedene Methoden benutzt.

1. Im ersten Verfahren wird Gl. (1) durch eine Polynomentwicklung gelöst

$$B(y) = 2 \int_0^{y/R_0} \mathcal{E}(r) \, dx. \quad (1)$$

Zu diesem Zweck wird Gl. (1) durch Substitution von

$$\xi = (r/R_0)^2 \quad \text{und} \quad \eta = (y/R_0)^2$$

in die sogen. ABELSche Integralgleichung überführt

$$B(\eta) = \int_{\eta}^1 \frac{\mathcal{E}(\xi)}{\sqrt{\xi - \eta}} \, d\xi. \quad (28)$$

Zur numerischen Lösung von Gl. (28) wird für  $\mathcal{E}(\xi)$  ein Polynom vom Grade  $M$  eingesetzt, wobei der Faktor  $(1 - \xi)$  dafür sorgt, daß für  $\xi = 1$ , also am Kanalrand,  $\mathcal{E}(\xi)$  verschwindet.

$$\mathcal{E}(\xi) = B_0(1 - \xi)(a_0 + a_1 \xi + \dots + a_M \xi^M). \quad (29)$$

Die Lösung von Gl. (28) erfolgt nun durch partielle Integration und liefert für  $B(\eta)$  ebenfalls ein Polynom folgender Form:

$$B(\eta) = B_0 \cdot R_0 (1 - \eta)^{3/2} \cdot (d_0 + d_1(1 - \eta) + \dots + d_M(1 - \eta)^M). \quad (30)$$

<sup>26</sup> J. HOLTS MARK, Ann. Phys. **58**, 577 [1919].

<sup>27</sup> A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, Springer-Verlag, Berlin 1955.

<sup>28</sup> G. TRAVING, Über die Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien, G. Braun-Verlag, Karlsruhe 1960.

Hierbei sind die  $d_N$  lineare Funktionen der  $a_N$ :

$$d_0 = \frac{3}{4} (a_0 + a_1 + \dots + a_M),$$

$$d_N = (-2)^N \frac{4}{3} \frac{(N+1)}{\prod_{i=1}^N (2i+3)} \left\{ a_N N! + \sum_{n=N+1}^M a_n \frac{n!}{(n-N)!} \right\}$$

für  $1 \leq N \leq M$ . (31)

Für die Berechnung von  $\mathcal{E}(\xi)$  geht man nun in folgender Weise vor: Der gemessene Verlauf  $B(y)$  bzw.  $B(\eta)$  wird durch ein Polynom der Gl. (30) angepaßt, und die Koeffizienten  $d_0 \dots d_M$  werden berechnet. Danach wird durch Auflösung von Gl. (31) nach  $a_N$  eine Rekursionsformel für die Berechnung der  $a_0 \dots a_M$  aus den  $d_0 \dots d_M$  aufgestellt:

$$a_N = \frac{1}{N!} \left\{ \frac{\frac{3}{4} \prod_{i=1}^N (2i+3)}{(N+1)(-2)^N} \cdot d_N - \sum_{n=N+1}^M a_n \frac{n!}{(n-N)!} \right\}, \quad (32)$$

$$a_0 = \frac{3}{4} d_0 - \sum_{N=1}^M a_N.$$

Bei der Berechnung der  $a_0 \dots a_M$  wird mit  $N=M$  begonnen und rückwärts bis zu  $a_0$  gerechnet. Sind alle Koeffizienten  $a_0 \dots a_M$  berechnet, dann kann  $\mathcal{E}(\xi)$  bzw.  $\mathcal{E}(r)$  als Funktion von  $r$  tabelliert werden. Diese umfangreiche Rechenprozedur wurde an der Rechenanlage TR 4 der Universität Hamburg durchgeführt.

2. Beim zweiten Verfahren wird der Kanalquerschnitt in Kreisringe der Dicke  $\Delta y$  zerlegt, wie dies in Abb. 29 dargestellt wurde.

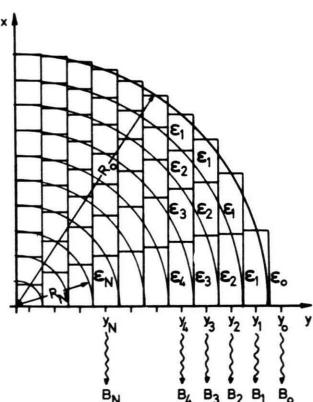


Abb. 29. Skizze zum Kreisringverfahren.

$\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_N, \dots, \mathcal{E}_{N_{\text{MAX}}}$  sei der Emissionskoeffizient in den einzelnen Kreisringen. Dann beträgt die bei  $y_0, y_1, \dots, y_N$  emittierte Intensität:

$$\begin{aligned} y_0: \quad & B_0 = \mathcal{E}_0 = 0, \\ y_1: \quad & B_1 = \alpha_{10} D_{10}, \\ y_2: \quad & B_2 = \alpha_{20} D_{10} + \alpha_{21} D_{21}, \\ y_3: \quad & B_3 = \alpha_{30} D_{10} + \alpha_{31} D_{21} + \alpha_{32} D_{32}, \\ & \vdots \\ y_N: \quad & B_N = \alpha_{N0} D_{10} + \alpha_{N1} D_{21} + \alpha_{N2} D_{32} + \dots \\ & \quad + \alpha_{N, N-1} D_{N, N-1}, \end{aligned} \quad (33)$$

wobei  $\alpha_{j, i} = 2 R_i \sqrt{1 - (y_j/R_i)^2}$  (34)

und  $D_{j, i} = \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i$  ist. (35)

Die Auflösung von (33) liefert zusammen mit (34) und (35) für die Berechnung des Emissionskoeffizienten  $\mathcal{E}(r)$  im  $N$ -ten Kreisring folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N &= D_{N, N-1} + \mathcal{E}_{N-1}, \\ D_{N, N-1} &= \left( B_N - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{N, i-1} \cdot D_{i, i-1} \right) / \alpha_{N, N-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Die Zahl der Kreisringe  $N_{\text{MAX}}$  ergibt sich aus der Schrittweite  $\Delta y$  und dem Kanalradius  $R_0$  zu  $N_{\text{MAX}} = R_0 / \Delta y$ . Ist  $N_{\text{MAX}}$  keine ganze Zahl, so wird auf die nächste ganze Zahl abgerundet. Bei der Berechnung von  $\mathcal{E}_N$  beginnt man am Kanalrand mit  $N=0$  und rechnet mit Hilfe von Gl. (36) schrittweise bis zur Kanalmitte ( $N=N_{\text{MAX}}$ ) die  $\mathcal{E}_N$ -Werte aus. Diese Berechnung wurde ebenfalls auf der TR-4-Rechenanlage durchgeführt.

Um die Brauchbarkeit der beiden Verfahren zu prüfen, wurden sie auf verschiedene Testverläufe angewandt, für die Gl. (1) leicht integrierbar ist. Als Beispiel werden die an zwei Testfunktionen berechneten Ergebnisse gezeigt.

Testverlauf 1:

$\mathcal{E}(r)$  sei über den gesamten Kanalquerschnitt konstant;

$\mathcal{E}(r) = 1$  für  $0 \leq r \leq R_0 = 1$ ;  $\mathcal{E}(r) = 0$  für  $r > 1$ . Am Kanalrand bei  $R_0 = 1$  tritt also ein Intensitätsprung der Höhe 1 auf.

Testverlauf 2:

Die Strahlungsdichte  $\mathcal{E}(r)$  sei nur in einer Randschicht von 0 verschieden.

$$\mathcal{E}(r) = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq 0,8$$

und

$$\mathcal{E}(r) = 1 \quad \text{für } 0,8 < r \leq 1$$

und

$$\mathcal{E}(r) = 0 \quad \text{für } r > 1.$$

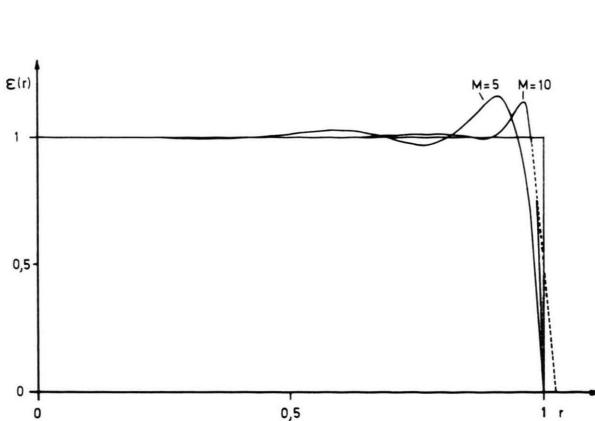


Abb. 30. Nach dem Polynomverfahren berechnete Sprungfunktion mit Polynomen vom Grade  $M=5$  und  $M=10$ ; gestrichelt eingezeichnet der Anstieg mit dem Kreisringverfahren bei  $\Delta y=0,05$  berechnet; beim Kreisringverfahren ergibt sich kein Überschwingen.

$R_0$  beträgt wieder gleich 1. In diesem Fall handelt es sich um einen sehr extremen Testverlauf. Ein Test unter solchen extremen Bedingungen ist jedoch notwendig, da die in Abschnitt II c berechneten  $\mathcal{E}(r)$ -Verteilungen ein hohes Intensitätsmaximum am Rand ergaben.

In Abb. 30, 31 ist das Ergebnis dieser Berechnungen aufgetragen. Eine weitergehende Analyse ergab, daß das Polynomverfahren nur dann zu brauchbaren Ergebnissen führt, wenn der  $\mathcal{E}(r)$ -Verlauf am Kanalrand kein allzu hohes Intensitätsmaximum besitzt. Eine Erhöhung des Grades des Polynoms verbessert die Rechnung nicht, denn die erhöhte Flankensteilheit wird nur durch stärkeres Durchschwingen in der Mitte erkauft. Für  $\mathcal{E}(r)$ -Verläufe ohne

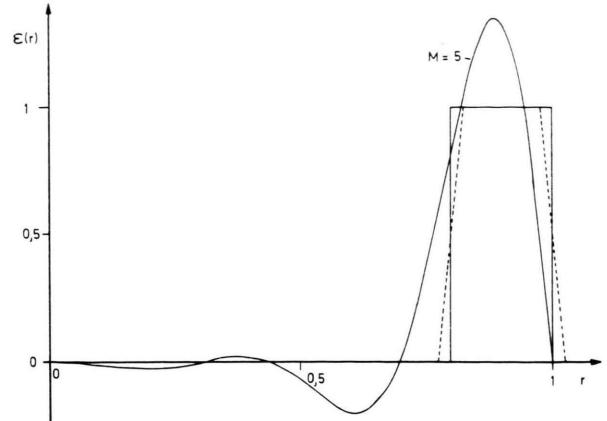


Abb. 31. Berechneter Doppelsprung (Testverlauf 2) nach dem Polynomverfahren mit einem Polynom vom Grade  $M=5$ ; gestrichelt mit dem Kreisringverfahren bei  $\Delta y=0,05$  berechnet.

Randmaximum ist das Polynomverfahren gut geeignet.

Das zweite Kreisringverfahren liefert in jedem Falle, ob mit oder ohne Randmaximum, bessere Ergebnisse. Die Flankensteilheit an den Sprungstellen hängt dabei nur von der Schrittweite  $\Delta y$  ab. Für die Berechnung der in Abschnitt II c gezeigten  $\mathcal{E}(r)$ -Verteilungen wurde deshalb dieses Verfahren benutzt, wobei die Schrittweite  $\Delta y$  so gewählt wurde, daß der Radius  $R_0$  in 20 bis 40 Kreisringe gleicher Dicke eingeteilt wurde.

Herrn Prof. Dr. H. RAETHER danke ich sehr für die Förderung dieser Arbeit. Der Bundesminister für wissenschaftliche Forschung hat dankenswerterweise Mittel für diese Untersuchung bereitgestellt.